

# Nejmenší možný souhrn znalostí pro maturitu z matematiky

RNDr. Vlastimil Klíma

## Příloha 1: několik pomalu řešených typových příkladů z každé kapitoly z maturitních úloh z let 2014 – jaro 2026

ver 1.3

V každém tématu jsme řešili vybrané maturitní příklady, které by byly co nejvíce typické nebo podobné ostatním. Ukazujeme tady různé postupy řešení, tedy vlastně to, jak se využijí potřebné znalosti. U maturity prosím kontrolujte výpočty, pokud vám zbyde čas.

Všechny potřebné znalosti k maturitě z matematiky na každé z témat (kapitol) jsou uvedeny v samostatném učebním textu, k němuž je toto příloha.

### Důležité upozornění:

**Autor tohoto textu deklaruje, že tento text má nekomerční charakter, poskytuje ho bezplatně, a slouží pouze pro vyučování, vzdělávací a pedagogické účely.**

Několik obrázků nakreslil autor textu, ty jsou označeny [VK].

Všechny ostatní výstřižky obrázků a obrázky zde uvedené jsou autorským dílem Centra pro zjišťování výsledků vzdělávání – Cermatu a jsou vyňaty z maturitních úloh z matematiky z let 2014 – jaro 2026, souborů a katalogů vzorových úloh, ilustračních testů, mimořádných testů, řešení příkladů a dalších materiálů Cermatu. Citace tohoto zdroje je kromě výše uvedeného navíc uvedena přímo v názvu odstavce, kde je použit obrázek Cermatu, například 2016\_01 je citace z maturitní zkoušky z matematiky z roku 2016, příklad 1. Podle § 31,(1)a,b Autorského zákona (č. 121/2000 Sb.), tento text neporušuje autorská práva Cermatu, a to z důvodu uvedené deklarace a citací.

## Obsah

3	ALGEBRAICKÉ VÝRAZY .....	7
3.1	2013_soubor-vzorovych-uloh, úloha 14.....	7
3.2	2014J_03.....	7
3.3	2014J_05.....	7
3.4	2015-16_katalog, úloha 3 .....	8
3.5	2015-16_katalog, úloha 4 .....	9
3.6	2016P_04 .....	9
3.7	2017J_01.....	10
3.8	2017J_04.....	11
3.9	2017P_04 .....	11
3.10	2021J_18.....	12
4	KVADRATICKÉ ROVNICE .....	12
4.1	2014P_03 .....	12
4.2	2014P_05 .....	13

4.3	2015J_18.....	14
4.4	2016J_21.....	15
4.5	2016P_05.....	15
4.6	2020P_06.....	16
4.7	2021P_06.....	17
4.8	2024P_24.....	18
5	KVADRATICKÉ NEROVNICE.....	19
	Čistě algebraicky.....	19
5.1	2013_soubor-vzorovych-uloh, úloha 12 a 13.....	19
5.2	2015_ilustracni_test.....	19
5.3	2015-16_02_katalog.....	20
5.4	2021J_mimoradny, úloha 25.....	20
5.5	2025P_17.....	21
	Úlohy na pomezí analytická geometrie.....	22
5.6	2015P_11.....	22
5.7	2021J_19.....	23
6	ČÍSELNÉ MNOŽINY.....	24
6.1	2013_soubor_vzorovych_uloh_úloha 1.....	24
6.2	2014P_01.....	24
6.3	2015J_01.....	25
6.4	2015J_02.....	25
6.5	2015-16_katalog, úloha 1.....	25
6.6	2016J_02.....	25
6.7	2016P_18.....	26
6.8	2019J_02.....	26
6.9	2022P_01, vyznačení intervalů.....	26
6.10	2024J_03, převod proměnných.....	27
7	VYJADŘOVÁNÍ NEZNÁMÉ ZE VZORCE.....	27
7.1	2014P_07.....	27
7.2	2015J_11.....	27
7.3	2015-16_katalog, úloha 4.....	28
7.4	2016J_07.....	29
7.5	2020J_03.....	29
7.6	2025J_02.....	30
8	LINEÁRNÍ ROVNICE, PROCENTA, ZLOMKY, PŘEVODY.....	30
	Lineární rovnice.....	30
8.1	2014P_06.....	30

8.2	2017P_05 .....	31
Procenta .....		32
8.3	2017J_11.....	32
8.4	2020J_01.....	33
8.5	2024J_02.....	33
Zlomky, převody .....		34
8.6	2024P_16 .....	34
8.7	2024P_19 .....	34
9	LINEÁRNÍ NEROVNICE .....	35
9.1	2015P_26 .....	35
9.2	2016J_06.....	36
9.3	2017P_03 .....	36
9.4	2018J_02.....	36
9.5	2019J_23.....	37
9.6	2024P_04, soustava lineárních nerovnic .....	37
9.7	2025P_03 .....	38
10	POSLOUPNOSTI .....	38
10.1	2014P_24, Vzorec obecné posloupnosti .....	38
Aritmetická posloupnost .....		39
10.2	2014P_23, AP.....	39
10.3	2015J_24, AP .....	40
10.4	Pozor na počty prvků.....	40
10.5	2016P_24, AP.....	41
10.6	2018P_22, AP.....	41
10.7	2020J_15, AP .....	42
10.8	2023P_09, AP.....	42
10.9	2025J_22, AP .....	43
Geometrická posloupnost .....		43
10.10	2015J_23, GP.....	43
10.11	2015P_19, GP .....	44
10.12	2018P_08, GP .....	44
10.13	2024P_11, GP .....	45
11	FINANČNÍ MATEMATIKA .....	45
11.1	2013_soubor-vzorovych-uloh, úloha 11, odepisování hodnoty počítače.....	45
11.2	2013_soubor-vzorovych-uloh, úloha 12, úroky z půjčky .....	46
11.3	2013_soubor-vzorovych-uloh, úloha 13, inflace .....	47
11.1	2015-16_katalog,úloha 5, složené úrokování, úvěr.....	47

11.2	2019P_24, hypotéka .....	48
11.3	2020P_13, složené úrokování .....	48
11.4	2025P_15, dluhopis .....	49
12	KOMBINATORIKA.....	50
12.1	2014J_17.....	50
12.2	2015J_25.....	50
12.3	2015P_18.....	51
12.4	2017P_22.....	51
12.5	2021J_24.....	52
12.6	2022J_23.....	53
12.7	2022P_23.....	53
13	PRAVDĚPODOBNOST A STATISTIKA .....	55
	Pravděpodobnost samotná.....	55
13.1	2015J_19, medián.....	55
13.2	2015P_16, medián, modus, průměr .....	55
13.3	2016P_09, medián, modus, průměr .....	56
13.4	2018J_10 a 2018J_11, statistika, průměr .....	57
13.5	Relativní četnosti.....	58
13.6	2018P_07, medián .....	58
	Pravděpodobnost ve spojení s kombinatorikou.....	59
13.7	2014J_16, pravděpodobnost, hod kostkou.....	59
13.8	2016J_24, pravděpodobnost losování.....	59
13.9	2016P_22, pravděpodobnost, kombinatorika.....	60
13.10	2017J_20, kombinatorika, pravděpodobnost.....	60
13.11	2021P_11, losy, pravděpodobnost .....	61
14	SLOVNÍ ÚLOHY .....	61
14.1	2014J_14, práce.....	61
14.2	2014J_20, procenta .....	62
14.3	2014P_17, cena .....	63
14.4	2021P_22, poměry .....	64
14.5	2023P_10, jízda.....	65
14.6	2025P_01, jízda.....	65
14.7	2013_soubor-vzorovych-uloh, úloha 16, trasa, jízda.....	67
15	PLANIMETRIE: N-ÚHELNÍKY .....	68
15.1	2014P_26.....	68
15.2	2015P_20.....	69
15.3	2016J_17.....	70

15.4	2017J_14.....	71
15.5	2017P_14.....	72
15.6	2018P_18.....	73
15.7	2025P_21.....	74
15.8	2015_ilustracni_test, úloha 4.....	75
16	PLANIMETRIE: PLOCHY .....	76
16.1	2014J_01, trojúhelník, obdélník .....	76
16.2	2014J_09, rovnoběžník, trojúhelníky .....	77
16.3	2017P_18, lichoběžník, trojúhelníky, obsah .....	77
16.4	2019P_08 a 09, kruhy, plocha .....	78
16.5	2024J_10, N-úhelník, plocha .....	78
16.6	2025J_19, kruhová výseč, plocha.....	79
16.7	2021J_17, trojúhelník, plocha.....	79
16.8	2023P_13, N-úhelník, plocha.....	80
17	STEREOMETRIE .....	81
17.1	2015J_21, válec.....	81
17.2	2015J_22, kužel .....	82
17.3	2016J_10 a 11, jehlan.....	82
17.4	2016P_21, válec a koule .....	84
17.5	2017J_24, dutý válec .....	85
17.6	2022J_21, vepsaný kruh do hranolu.....	86
17.7	2023J_20, hranoly .....	86
18	Tato kapitola záměrně chybí .....	87
19	PARABOLA .....	87
19.1	2014J_08 parabola .....	87
19.2	2014P_25 exponenciála,přímka, hyperbola, parabola.....	88
19.3	2017J_16 parabola .....	90
19.4	2018P_25 parabola, přímka, konstanta .....	91
19.5	2019P_17 parabola.....	92
20	HYPERBOLA .....	93
20.1	2015J_07 hyperbola .....	93
20.2	2015J_25 přímka, hyperbola.....	94
20.3	2018P_24 hyperbola.....	95
20.4	2021P_25 hyperbola, parabola, logaritmus, přímka.....	96
21	MOCNINA A EXPONENCIÁLA .....	97
21.1	2013_soubor-vzorovych-uloh (2) .....	97
21.2	2013_soubor-vzorovych-uloh (3) .....	97

21.3	2014P_25 .....	98
21.4	2017J_13.....	99
21.5	2020P_02 .....	99
21.6	2021J_01.....	99
21.7	2021J_mimoradny (1).....	99
21.8	2024P_07 .....	100
21.9	2026J_16.....	100
22	LOGARITMY .....	100
	Analytické řešení.....	101
22.1	2014P_11 .....	101
22.2	2015J_06.....	101
22.3	2016J_15.....	101
22.4	2017P_07 .....	102
22.5	2021J_10.....	102
22.6	2022J_10.....	103
22.7	2023J_07.....	103
	Grafické řešení .....	104
22.8	2021J_mimoradny_termin_17 .....	104
22.9	2021J_20.....	105
23	ANALYTICKÁ GEOMETRIE.....	106
23.1	2014J_12, vektory a jednoduchá vzdálenost.....	106
23.2	2014J_23, střed úsečky a vzdálenost dvou bodů .....	107
23.3	2014P_09, součet dvou vektorů.....	108
23.4	2015J_09, směrový vektor, kolmice.....	109
23.5	2015J_20, parametrické vyjádření přímky – nebojte se dosadit .....	110
23.6	2015P_24, rovnoběžnost a parametrické vyjádření přímky .....	111
23.7	2017J_08, čtverec – kreslicí úloha .....	112
23.8	2017J_09, přímka – odchylka .....	113
23.9	2018J_19, kolmé vektory .....	114
23.10	2018J_20, obsah kruhu.....	115
23.11	2020J_26, normálový a směrový vektor .....	116
23.12	2021J_07, čtverec a kolmé úhlopříčky .....	117
23.13	2024P_18, výška a těžnice v trojúhelníku.....	118
23.14	2025P_18, poloha dvou přímek .....	119
24	GONIOMETRICKÉ FUNKCE.....	120
24.1	2014J_07.....	120
24.2	2015J_16.....	120

24.3	2017J_25.....	121
24.4	2017P_13.....	122
24.5	2019J_11.....	123
24.6	2021J_11.....	123
25	Literatura.....	124

### 3 ALGEBRAICKÉ VÝRAZY

#### 3.1 2013\_soubor-vzorovych-uloh, úloha 14

Za jakých podmínek pro  $c \in \mathbb{R}$  má výraz  $\frac{c^2 - 4}{c^2 + 2c} \cdot \frac{c}{c^2 + 4}$  smysl?

- A)  $c \neq \pm 2$
- B)  $c \neq 0; c \neq \pm 2$
- C)  $c \neq 0; c \neq 2;$
- D)  $c \neq 0; c \neq -2$
- E) za jiných podmínek

Řešení.

Výraz má smysl pro všechna reálná čísla  $c$ , pro něž se nedělí nulou. Výraz  $c^2 + 4$  není nikdy nula, protože je vždy větší nebo roven 4. Zbývá zjistit, kdy je první výraz ve jmenovateli roven nule, tj. řešíme rovnici

$c^2 + 2c = 0$ . Vytkneme  $c$ :  $c(c + 2) = 0$ . Evidentně má řešení  $c=0$  nebo  $c=-2$ , takže tyto hodnoty musíme vyloučit. Řešením je **(D)**.

#### 3.2 2014J\_03

Výraz (s proměnnou  $a \in \mathbb{R}$ ) zjednodušte tak, aby neobsahoval závorky.

$$3[a - a(a - 1)]^2 =$$

Řešení.

Nejdříve jako vždy zjednodušíme výraz v závorce.

$$a - a(a - 1) = a - (a^2 - a) = a - a^2 + a = 2a - a^2$$

Potom umocníme na druhou podle vzorce:  $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ :

$$(2a - a^2)^2 = 4a^2 - 4a^3 + a^4$$

a vynásobíme třemi:  $3 \cdot (2a - a^2)^2 = 12a^2 - 12a^3 + 3a^4$

Řešení je:

$$3a^4 - 12a^3 + 12a^2$$

=====

#### 3.3 2014J\_05

V oboru  $\mathbb{R}$  řešte:

$$\frac{1}{x^2 - x} = \frac{3}{2x} - \frac{1}{x - 1}$$

V záznamovém archu uveďte celý postup řešení včetně stanovení podmínek nebo zkoušky.

Řešení.

Je to rovnice se zlomky, takže převedeme vše na jednu stranu a na společného jmenovatele. Přitom si uvědomíme, že  $x^2 - x = x(x - 1)$ , takže ve jmenovateli máme jen  $x(x - 1)$ .

$$\begin{aligned} \frac{1}{x(x-1)} - \frac{3}{2x} + \frac{1}{x-1} &= 0 \\ \frac{2 - 3(x-1) + 2x}{2x(x-1)} &= 0 \\ \frac{2 - 3x + 3 + 2x}{2x(x-1)} &= 0 \\ \frac{5 - x}{2x(x-1)} &= 0 \end{aligned}$$

Má-li být zlomek nula, musí být čítecitel roven nule, tj.  $x = 5$ . Podmínky jsou vidět od začátku, a sice

$$x \neq 0, x \neq 1 \text{ a řešení je } x = 5.$$

Mohli bychom také napsat

$$x \neq 0, x \neq 1, K = \{5\}.$$

Cermat navíc uvádí  $L=P=1/20$ , i když náš výsledek je postačující.

### 3.4 2015-16\_katalog, úloha 3

**3** Je dán výraz:

$$\frac{x^2 + 3x - 10}{x^2 - 4}$$

3.1 Určete, pro které hodnoty  $x \in \mathbb{R}$  má výraz smysl, a výraz zjednodušte.

3.2 Určete hodnotu výrazu pro  $x = 0$ .

3.3 Určete hodnoty proměnné  $x \in \mathbb{R}$ , pro které má výraz hodnotu 0.

3.4 Určete hodnoty proměnné  $x \in \mathbb{R}$ , pro které má výraz hodnotu 1.

Řešení.

3.1 Musíme si vzpomenout na vzorec pro rozdíl čtverců, konkrétně  $x^2 - 4 = (x + 2)(x - 2)$ . Odtud odvodíme podmínky, aby ve jmenovateli nebyla nula:  $x \neq -2, x \neq 2$ . Podíváme se, jestli lze výraz krátit, tj. potřebujeme rozložit čítecitel  $x^2 + 3x - 10 = (x + 5)(x - 2)$ , což se nám povedlo díky „Vietovým vzorcům“, tj. odhadem, ale mohli bychom normálně vypočítat kořeny rovnice  $x^2 + 3x - 10 = 0$  a také bychom dostali uvedený rozklad. Teď vidíme, že zkomek můžeme krátit:

$$\frac{x^2 + 3x - 10}{x^2 - 4} = \frac{(x + 5)(x - 2)}{(x + 2)(x - 2)} = \frac{x + 5}{x + 2}$$

připomeňme, že to je za podmínek  $x \neq -2, x \neq 2$ .

3.2 Do výrazu dosadíme  $x=0$  a dostaneme  $\frac{5}{2}$ .

3.3 Výraz je evidentně nula, když čítecitel je nula, tj. když  $x = -5$ .

3.4 Máme řešit rovnici

$$\frac{x+5}{x+2} = 1$$

Protože  $x \neq -2$ , můžeme rovnici vynásobit a máme

$$\begin{aligned} x+5 &= x+2 \\ 5 &= 2 \end{aligned}$$

což nenastane nikdy, takže 3.4. nemá řešení, mohli bychom také napsat  $K = \emptyset$ .

=====

### 3.5 2015-16\_katalog, úloha 4

4 Je dán výraz:

$$\frac{b}{b+2} - \frac{b^2-2b}{4-b^2}$$

Který z upravených výrazů je s daným výrazem ekvivalentní?

A)  $\frac{2b}{b+2}; b \neq -2; b \neq 2$

B)  $0; b \neq -2; b \neq 4$

C)  $\frac{2b}{b-2}; b \neq -2; b \neq 2$

D)  $\frac{b}{b+2}; b \neq -2; b \neq 2$

E)  $\frac{4b}{b^2-4}; b \neq -2; b \neq 2$

Řešení.

Opět si musíme si vzpomenout na vzorec pro rozdíl čtverců, konkrétně  $4 - b^2 = (2 + b)(2 - b)$ . Máme tedy podmínky  $b \neq -2, b \neq 2$ , aby ve jmenovateli nebyla nula.

Pak můžeme upravit zlomek

$$\begin{aligned} \frac{b}{b+2} - \frac{b^2-2b}{(2+b)(2-b)} &= \frac{b(2-b) - (b^2-2b)}{(2+b)(2-b)} = \frac{2b - b^2 - b^2 + 2b}{(2+b)(2-b)} = \frac{4b - 2b^2}{(2+b)(2-b)} \\ &= \frac{2b(2-b)}{(2+b)(2-b)} = \frac{2b}{2+b} = \frac{2b}{b+2} \end{aligned}$$

Připomeňme, že jsme mohli krátit, protože jedna z podmínek byla  $b \neq 2$ . Řešením je (A).

### 3.6 2016P\_04

Pro  $a \in \mathbb{R} \setminus \{-2; 1; 2\}$  zjednodušte:

$$\left(a - 1 - \frac{1}{a-1}\right) \cdot \frac{a-1}{a \cdot a - 4} =$$

V záznamovém archu uveďte celý postup řešení.

Řešení.

Je to výraz se zlomky, takže převedeme vše na společného jmenovatele. Přitom si uvědomíme, že  $a \cdot a - 4 = a^2 - 4 = (a + 2)(a - 2)$ , takže ve jmenovateli máme trochu složitější výraz:

$$\left(\frac{(a-1)^2 - 1}{a-1}\right) \cdot \frac{a-1}{(a+2)(a-2)} =$$

$$\left(\frac{a^2 - 2a + 1 - 1}{a - 1}\right) \cdot \frac{a - 1}{(a + 2)(a - 2)} =$$

$$\frac{a^2 - 2a}{a - 1} \cdot \frac{a - 1}{(a + 2)(a - 2)} =$$

$$\frac{a^2 - 2a}{a - 1} \cdot \frac{a - 1}{(a + 2)(a - 2)} =$$

$$\frac{a \cdot (a - 2)}{a - 1} \cdot \frac{a - 1}{(a + 2)(a - 2)} =$$

Protože máme zajištěny podmínky přímo v zadání (viz  $a \neq -2, a \neq 1, a \neq +2$ ), můžeme krátit (a-2) i (a-1):

$$\frac{a \cdot 1}{1} \cdot \frac{1}{\frac{a}{a + 2}} =$$

$$= \frac{a}{a + 2}$$

Řešením je

$$\frac{a}{a + 2}$$

=====

### 3.7 2017J\_01

Je dán výraz:

$$\frac{4(y^2 + 1)(2y - 3)}{2y + 4}$$

**Určete množinu všech  $y \in \mathbb{R}$ , pro která má výraz hodnotu 0.**

Řešení.

Má-li být zlomek nula, musí být čítecitel roven nule, tj.

$$4(y^2 + 1) \cdot (2y - 3) = 0$$

Jenže  $y^2 + 1$  není nikdy nula, protože je to číslo vždy větší nebo rovno jedné. Proto musí být nula druhý čítecitel,

$$2y - 3 = 0$$

$$y = \frac{3}{2}$$

$$\text{řešení je } y = \frac{3}{2}$$

=====

Mohli bychom také napsat

$$K = \left\{\frac{3}{2}\right\}.$$

=====

### 3.8 2017J\_04

Pro  $a \in \mathbb{R} \setminus \{-5; 5\}$  zjednodušte:

$$\frac{5a}{5-a} - \frac{10a^2}{25-a^2} =$$

V záznamovém archu uveďte celý postup řešení.

Řešení.

Jakmile vidíme výraz  $25 - a^2$ , musí nás okamžitě napadnout „vzorec pro rozdíl čtverců“.

$$25 - a^2 = (5 + a) \cdot (5 - a).$$

Pak už můžeme zlomky převést na společný jmenovatel

$$\begin{aligned} \frac{5a}{5-a} - \frac{10a^2}{(5+a) \cdot (5-a)} &= \frac{5a(5+a) - 10a^2}{(5+a) \cdot (5-a)} = \frac{25a + 5a^2 - 10a^2}{(5+a) \cdot (5-a)} = \frac{25a - 5a^2}{(5+a) \cdot (5-a)} \\ &= \frac{5a(5-a)}{(5+a) \cdot (5-a)} = \frac{5a}{(5+a)} = \frac{5a}{a+5} \end{aligned}$$

$$\text{řešení je } \frac{5a}{a+5}$$

=====

Nesmíme zapomenout na podmínky, ale ty jsou splněny přímo v zadání:  $a \neq -5$ ,  $a \neq 5$ .

### 3.9 2017P\_04

Pro  $a \in \mathbb{R} \setminus \{0; 2\}$  zjednodušte:

$$\left(2 - \frac{2a}{a-2}\right) : \frac{a}{2a-4} =$$

V záznamovém archu uveďte celý postup řešení.

Řešení.

Jakmile vidíme výraz  $2a - 4$ , musí nás okamžitě napadnout „vytknutí dvojky“.

$2a - 4 = 2 \cdot (a - 2)$ . Pak už můžeme dělat úpravy:

$$\left(2 - \frac{2a}{a-2}\right) : \frac{a}{2 \cdot (a-2)} = \frac{2a - 4 - 2a}{a-2} : \frac{a}{2(a-2)} = \frac{-4}{a-2} \cdot \frac{2(a-2)}{a} = \frac{-8}{a}$$

=====

Nesmíme zapomenout na podmínky, ale ty jsou splněny přímo v zadání:  $a \neq 0$ ,  $a \neq 2$ .

### 3.10 2021J\_18

Je dán výraz:

$$V(a) = \frac{(a+4)(a^2-4)(a+3)^2}{(a^2-9)(a-2)^2}$$

Hodnota výrazu  $V(a)$  je rovna nule pro

- A) alespoň tři celá čísla.
- B) právě dvě záporná celá čísla.
- C) právě jedno kladné a jedno záporné celé číslo.
- D) právě dvě kladná celá čísla.
- E) právě jedno celé číslo.

Řešení.

Pokud se má zlomek rovnat nule, musí být čitatel roven nule. Čitatel je navíc součin nějakých výrazů, takže řešením bude jakékoliv číslo, pro něž je některý z těchto tří výrazů roven nule. Jmenovatelem se musíme zabývat, ale jen proto, abychom nedělili nulou, tedy stanovili podmínky.

Čitatel je nula pro  $a = -4, +2, -2, -3$ . Jmenovatel je nula pro  $a = -3, +3, +2$ , takže řešením jsou jen čísla  $a \in \{-4, -2\}$ , tj. řešení je **(B)**.

## 4 KVADRATICKÉ ROVNICE

### 4.1 2014P\_03

3 Výraz s proměnnou  $x \in \mathbb{R}$  rozložte na součin.

1 bod

$$x^2 + 16x + 64 =$$

Řešení.

V tomto okamžiku si MUSÍME vzpomenout na vzorec  $(a+b)^2 = a^2 + 2a + b^2$ . Pak velmi rychle napíšeme řešení

$$x^2 + 16x + 64 = (x + 8)^2$$

=====

Nebo budeme muset počítat kořeny podle vzorce

$$x_{1,2} = \frac{-16 \pm \sqrt{16^2 - 4 \cdot 1 \cdot 64}}{2} = \frac{-16 \pm \sqrt{0}}{2} = -8$$

a protože nám vyšel jeden kořen, je dvojnásobný, takže jsme došli ke stejnému výsledku.

Řešení je:

$$x^2 + 16x + 64 = (x + 8)^2$$

=====

## 4.2 2014P\_05

max. 3 body

5 Stanovte podmínky a v oboru  $\mathbb{R}$  řešte:

$$\frac{3x^2 + 5x + 2}{3x^2 - 3} = 0$$

V záznamovém archu uveďte celý postup řešení.

Řešení.

Podmínky jsou jasné - abychom nedělili nulou. Zjistíme, kdy by to nastalo, tj. vyřešíme rovnici

$$\begin{aligned} 3x^2 - 3 &= 0 \\ 3(x^2 - 1) &= 3(x + 1)(x - 1) = 0 \end{aligned}$$

Takže podmínky jsou

$$x \neq -1, x \neq +1$$

Potom rovnice v zadání platí, když v čitateli je nula, tj. řešíme rovnici

$$3x^2 + 5x + 2 = 0.$$

Vypočteme kořeny podle vzorce

$$x_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 3 \cdot 2}}{2 \cdot 3} = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 24}}{6} = \frac{-5 \pm 1}{6}$$

a máme dva kořeny:  $-1$  a  $\frac{-4}{6} = -\frac{2}{3}$ . Ovšem v podmínkách je kořen  $-1$  zakázaný ( $x \neq -1$ ), takže je jediný kořen  $-\frac{2}{3}$ . Řešení můžeme zapsat jako

$$\begin{aligned} x \neq -1, x \neq +1, x &= -\frac{2}{3} \\ \text{=====} \end{aligned}$$

nebo jako:

$$\begin{aligned} x \neq -1, x \neq +1, K &= \left\{-\frac{2}{3}\right\} \\ \text{=====} \end{aligned}$$

### 4.3 2015J\_18

V oboru  $\mathbb{R}$  jsou dány rovnice:

I:  $2x^2 - 4 = -4x$

II:  $(2x - 1)^2 = 0$

III:  $x^2 - 1 = -(x^2 - 1)$

(CZW)

**2 body**

**18** Která z uvedených rovnic nemá řešení?

- A) I a II
- B) II a III
- C) pouze I
- D) pouze III
- E) Všechny tři rovnice mají řešení.

Řešení.

Abychom mohli odpovědět, je ideální zjistit kořeny všech tří rovnic.

Rovnice I:

$$2x^2 + 4x - 4 = 0.$$

Abychom se moc neunavili, můžeme rovnici vydělit dvěma:

$$x^2 + 2x - 2 = 0.$$

Vypočteme kořeny podle vzorce

$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 8}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{12}}{2}$$

Jak vidíme, kořeny jsou **dva**.

Rovnice II: Tady se nemusíme nijak snažit, rovnice platí jen v případě, že

$2x - 1 = 0$ , tj.  $x = \frac{1}{2}$ . Jak vidíme, kořen je právě **jeden**.

Rovnice III:

$$x^2 - 1 = -(x^2 - 1)$$

Upravíme na klasický tvar

$$x^2 - 1 = -x^2 + 1$$

$$2x^2 - 2 = 0$$

$$x^2 - 1 = 0$$

a vidíme **dva** kořeny  $x = \pm 1$ .

Teď je odpověď snadná: (E). **Úloh tohoto typu bylo u maturit několik. Vždy se vyplatí u všech rovnic (nerovnic) zjistit všechna řešení a potom teprve odpovídat na otázku.**

#### 4.4 2016J\_21

2 body

21 Doplňte do rámečků taková celá čísla, aby platila rovnost:

$$(3x + \square)^2 = \square x^2 + 60x + \square$$

Jaký je součet všech tří čísel doplněných do rámečků?

- A) 23
- B) 113
- C) 119
- D) 939
- E) jiný součet

Řešení.

Toto je trochu neobvyklý (ojediněný) příklad na vzorec

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

Vidíme, že kvadratický člen nalevo bude tvořit

$$(3x)^2 = 9x^2.$$

Tím máme druhý čtvereček (9). Výraz „2ab“ tady bude  $2 \cdot 3x \cdot b = 6xb$  a my tam máme  $60x$ , čili „b“ = 10, neboli první čtvereček doplníme na 10. Absolutní člen je pak jasně  $10^2 = 100$  a máme poslední čtvereček. Protože chtějí součet těch doplněných čísel, je to  $9 + 10 + 100 = 119$ . Řešení je (C).

#### 4.5 2016P\_05

max. 3 body

5 V oboru R řešte:

$$\frac{1}{2x-4} + \frac{1-x}{x^2-2x} = \frac{1}{2}$$

V záznamovém archu uveďte celý postup řešení včetně stanovení podmínek.

Řešení.

Rovnice tohoto typu se vyplatí řešit tak, že vše převedeme na levou stranu, na společného jmenovatele a na pravé straně bude nula, což nám usnadní řešení. Takže upravujeme:

$$\frac{1}{2x-4} + \frac{1-x}{x^2-2x} - \frac{1}{2} = 0$$

$$\frac{1}{2(x-2)} + \frac{1-x}{x(x-2)} - \frac{1}{2} = 0$$

Z tohoto zápisu už vidíme **podmínky** – nesmí se dělit nulou, čili  $x \neq 0, x \neq 2$

$$\frac{x + 2(1-x) - x(x-2)}{2x(x-2)} = 0$$

$$\frac{x + 2 - 2x - x^2 + 2x}{2x(x - 2)} = 0$$

$$\frac{x + 2 - x^2}{2x(x - 2)} = 0$$

$$\frac{x^2 - x - 2}{x(x - 2)} = 0$$

Teď vypočteme kořeny u kvadratického trojčlenu v čitateli (nebo je odhadneme pomocí Vietových vzorců – většinou to jde):

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 8}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2}$$

taskže máme dva kořeny: 2 a -1, čili máme rozklad  $x^2 - x - 2 = (x - 2)(x + 1)$  a zlomek vypadá takto:

$$\frac{(x - 2)(x + 1)}{x(x - 2)} = 0$$

Můžeme krátit (x - 2), protože v podmínkách je zaručeno, že to není nula:

$$\frac{(x + 1)}{x} = 0$$

Zlomek je nula, právě když čítec je nula, čili  $x = -1$ . Řešení včetně podmínek je toto:

$$x \neq 0, x \neq 2, x = -1$$

=====

nebo bychom mohli napsat

$$x \neq 0, x \neq 2, K = \{-1\}$$

=====

## 4.6 2020P\_06

**max. 2 body**

**6**    **V oboru R řešte:**

$$\frac{x - 6}{x - 3} = 2 - \frac{x}{x + 3}$$

**V záznamovém archu uveďte celý postup řešení.**

Řešení.

Z tohoto zápisu už vidíme **podmínky** – nesmí se dělit nulou, čili  $x \neq 3, x \neq -3$ . Rovnice tohoto typu se vyplatí řešit tak, že vše převedeme na levou stranu, na společného jmenovatele a na pravé straně bude nula, což nám usnadní řešení. Takže upravujeme:

$$\frac{x - 6}{x - 3} - 2 + \frac{x}{x + 3} = 0$$

$$\frac{(x - 6)(x + 3) - 2(x - 3)(x + 3) + x(x - 3)}{(x - 3)(x + 3)} = 0$$

Teď si vzpomeňte na vzorec  $(x - 3)(x + 3) = x^2 - 9$  nebo postupně roznásobte, ale mínus dvojku musíte nechat před závorkou v každém případě

$$\frac{x^2 + 3x - 6x - 18 - 2(x^2 - 9) + x^2 - 3x}{(x - 3)(x + 3)} = 0$$

$$\frac{x^2 - 3x - 18 - 2x^2 + 18 + x^2 - 3x}{(x - 3)(x + 3)} = 0$$

$$\frac{-6x}{(x - 3)(x + 3)} = 0$$

Zlomek je nula, právě když čítec je nula, čili  $x = 0$ . Řešení včetně podmínek je toto:

$$x \neq -3, x \neq 3, x = 0$$

=====

nebo bychom mohli napsat

$$x \neq -3, x \neq 3, K = \{0\}$$

=====

## 4.7 2021P\_06

**max. 2 body**

**6** V oboru  $\mathbb{R}$  řešte:

$$\frac{1}{x-5} + 1 = \frac{2x-9}{x-5} + \frac{1}{x-1}$$

**V záznamovém archu uveďte celý postup řešení.**

Postup řešení je stejný jako v předchozím příkladu. **Převést vše na levou stranu, potom na společného jmenovatele, zjistit podmínky a zlomek je nula, když čítec je nula.** Úloh přesně tohoto typu bylo u maturit minimálně deset !!!

Řešení je

$$x \neq 1, x \neq 5, K = \{0\}$$

=====

## 4.8 2024P\_24

### VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 24

Je dán algebraický výraz:

$$\frac{x^2 - 16}{2x^2 - 7x - 4}$$

max. 4 body

**24 Ke každé podúloze (24.1–24.2) přiřaďte odpovídající výsledek (A–F).**

24.1 Jaké jsou všechny hodnoty  $x$ , pro něž zadaný výraz nemá smysl? \_\_\_\_\_

24.2 Jaké jsou všechny nulové body tohoto výrazu? \_\_\_\_\_

A)  $-4; 4$

B)  $4$

C)  $-4$

D)  $-\frac{1}{2}; 4$

E)  $-\frac{1}{2}$

F) jiný výsledek

Řešení.

24.1 Podmínky jsou jasné - abychom nedělili nulou. Zjistíme, kdy by to nastalo, tj. vyřešíme rovnici  $2x^2 - 7x - 4 = 0$ .

Vypočteme kořeny podle vzorce

$$x_{1,2} = \frac{+7 \pm \sqrt{(-7)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-4)}}{2 \cdot 2} = \frac{+7 \pm \sqrt{49 + 32}}{4} = \frac{+7 \pm 9}{4}$$

a máme dva kořeny:  $4$  a  $-\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$ . Takže tyto hodnoty nesmí proměnná  $x$  nabývat, jinak by se dělilo nulou. Odpověď je **(D)**.

24.2 Tady vyřešíme rovnici  $x^2 - 16 = 0$ . P Samozřejmě hned vidíme rozdíl dvou čtverců a rozklad

$$x^2 - 16 = (x + 4)(x - 4) = 0$$

takže kořeny jsou  $-4$  a  $+4$ , jenže  $4$  je zakázaná hodnota, takže máme jen jeden kořen  $x = -4$ . Odpověď je **(C)**.

## 5 KVADRATICKÉ NEROVNICE

### Čistě algebraicky

#### 5.1 2013\_soubor-vzorovych-uloh, úloha 12 a 13

Jaké je řešení nerovnice  $\frac{-5x}{x-5} < 0$  v oboru  $\mathbb{R}$ ?

- A)  $\emptyset$
- B)  $(5; +\infty)$
- C)  $(-\infty; 5)$
- D)  $(-\infty; 5) \cup (5; +\infty)$
- E)  $(-\infty; 0) \cup (5; +\infty)$

Jaké je řešení nerovnice  $x \cdot (3 - 2x) < 0$  v oboru  $\mathbb{R}$ ?

- A)  $(-\infty; \frac{3}{2})$
- B)  $(0; +\infty)$
- C)  $(-\infty; 0) \cup (\frac{3}{2}; +\infty)$
- D)  $(0; \frac{3}{2})$
- E)  $\mathbb{R} \setminus \{0; \frac{3}{2}\}$

Řešení.

U první úlohy jsou nulové body 0 a 5, u druhé úlohy 0 a  $\frac{3}{2}$ . Obě úlohy řešíme nulovými body. Řešení je E,C.

#### 5.2 2015\_ilustracni\_test

9 Určete všechny hodnoty  $x \in \mathbb{R}$ , které vyhovují nerovnici:

1 bod

$$\frac{3-2x}{-2} < x$$

Řešení.

Nerovnici můžeme násobit záporným číslem  $-2$  a obrátit znaménko:

$$3 - 2x > -2x$$

$$3 > 0$$

Tato nerovnice platí vždy, takže řešením jsou všechna reálná čísla.

Odpověď je

$$x \in \mathbb{R}$$

nebo

$$K = \mathbb{R}$$

$$K = \mathbb{R}$$

$$K = \mathbb{R}$$

### 5.3 2015-16\_02\_katalog

2 V rovnici  $x^2 + bx - 12 = 0$  s neznámou  $x \in \mathbf{R}$  je jeden kořen  $x_1 = -2$ .  
Vypočtěte koeficient  $b$  a druhý kořen.

Řešení.

Jestli je kořen  $x_1 = -2$ , pak musí splňovat rovnici, čili musí platit

$$\begin{aligned}(-2)^2 + b \cdot (-2) - 12 &= 0 \\4 - 2b - 12 &= 0 \\-8 &= 2b \\b &= -4\end{aligned}$$

Takže máme rovnici

$$x^2 - 4x - 12 = 0$$

a její kořeny vypočteme: 6 a  $-2$ .

Odpověď je

$$\underline{\underline{b = -4; x = 6}}$$

### 5.4 2021J\_mimoradny, úloha 25

**max. 4 body**

**25 Přiřadte ke každé nerovnici (25.1–25.4) množinu všech jejích řešení (A–F) v oboru  $\mathbf{R}$ .**

25.1  $(x - 3)(x + 2) < 0$  \_\_\_\_\_

25.2  $\frac{x + 3}{2 - x} < 0$  \_\_\_\_\_

25.3  $\frac{(x - 3)^2}{x + 2} < 0$  \_\_\_\_\_

25.4  $\frac{(x + 3)(x - 2)}{x + 3} < 0$  \_\_\_\_\_

A)  $(-\infty; -3) \cup (2; +\infty)$   
B)  $(-\infty; -3) \cup (-3; 2)$   
C)  $(-\infty; -2)$   
D)  $(-\infty; 2)$   
E)  $(-3; 2)$   
F)  $(-2; 3)$

Řešení.

Každou z nerovnic řešíme nulovými body.

25.1 má nulové body  $-2, 3$ , tj. řešení je (F)

25.2 nejprve vynásobíme mínus jedničkou (a obrátíme znaménko nerovnice), abychom ve jmenovateli místo  $2 - x$  dostali  $x - 2$ , nulové body jsou  $-3, 2$ . Řešení je (A)

25.3 Uvědomíme si, že výraz v čitateli je vždy nezáporný, jenom nesmí být nula, to by nerovnice nepolatila, čili  $x \neq 3$ . Potom můžeme rovnici vydělit  $(x - 3)^2$  a dostaneme

$$\frac{1}{x + 2} < 0$$

čili  $x + 2 < 0$  neboli  $x < -2$ . Řešením je celý interval  $x \in (-\infty; -2)$ , protože do něj nepatří bod 3 z podmínky  $x \neq 3$ . Řešením je (C)

25.4 Vidíme, že podmínka je  $x \neq -3$ . Když je splněna, můžeme nerovnici krátit a zbyde  $x - 2 < 0$ , takže  $x < 2$ . Řešením ale není celý interval  $x \in (-\infty; 2)$ , protože z něj musíme vyjmout bod  $-3$  z podmínky  $x \neq -3$ .

Nakonec tedy máme řešení  $x \in (-\infty; -3) \cup (-3; 2)$ , tedy odpověď je (B).

## 5.5 2025P\_17

<b>2 body</b>
<b>17 Pro kterou z následujících nerovnic je množinou všech řešení v oboru <math>\mathbb{R}</math> interval <math>(2; 3)</math>?</b>
A) $x^2 + 6x + 5 < 0$
B) $x^2 - 6x + 5 < 0$
C) $x^2 + 5x + 6 < 0$
D) $x^2 - 5x + 6 < 0$
E) $x^2 - 5x - 6 < 0$

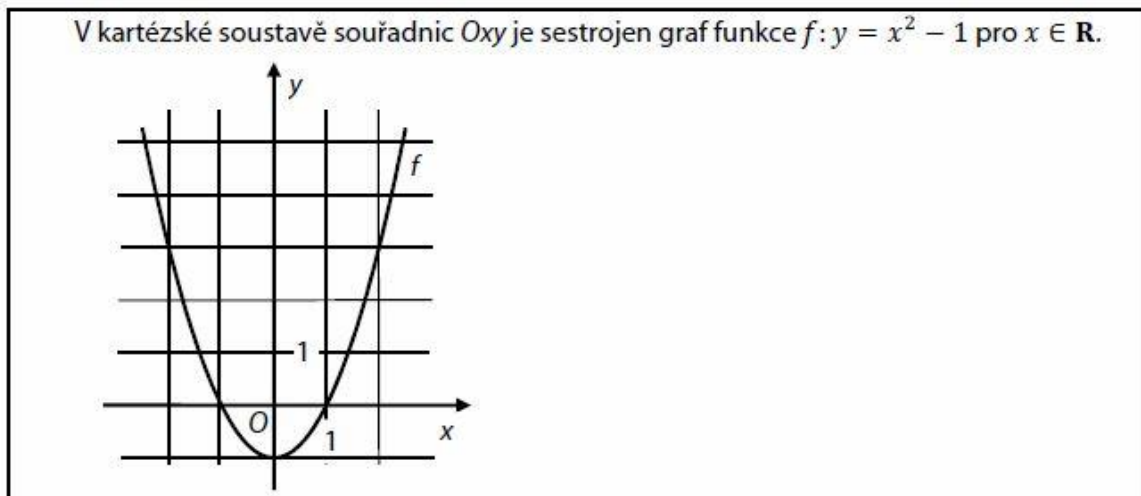
Řešení.

Za normálních okolností bychom u každé nerovnice vypočítali kořeny kvadratického trojčlenu a řešili každou z rovnic nulovými body. To by bylo ale dost dlouhé. Zkusíme se zamyslet, jak by to probíhalo. V otázce je totiž nemalá nápověda. Ten správný kvadratický trojčlen nalevo musí totiž obsahovat jako nulové body čísla 2 a 3. Jinak by množinou všech řešení nemohl být interval  $(2; 3)$ , ale byl by to interval tvořený jinými kořeny kvadratického trojčlenu. Všechny to jsou paraboly obrácené vzhůru a menší než nula jsou právě mezi kořeny. Stačí tedy zjistit, který z těch kvadratických trojčlenů má kořeny 2 a 3. Řešením je (D).

# Úlohy na pomezí analytická geometrie

## 5.6 2015P\_11

### VÝCHOZÍ TEXT A GRAF K ÚLOZE 11



(CZVV)

1 bod

11 Určete všechny hodnoty proměnné  $x$ , pro něž je  $f(x) \leq 3$ .

Řešení.

Řešíme tedy úlohu  $x^2 - 1 \leq 3$ . Můžeme ji řešit klasicky nulovými body. Upravíme:

$$x^2 - 4 \leq 0$$

$$(x - 2)(x + 2) \leq 0$$

Nulové body jsou  $-2$  a  $+2$  a pomocí nich dostaneme řešení

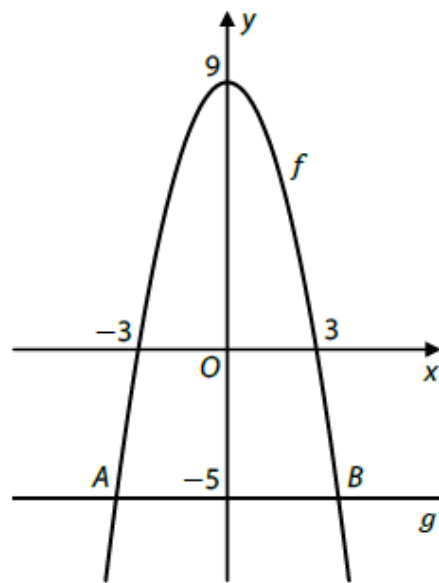
$$x \in \langle -2; +2 \rangle$$

nebo můžeme napsat

$$K = \langle -2; +2 \rangle$$

## 5.7 2021J\_19

V kartézské soustavě souřadnic  $Oxy$  je sestaven graf kvadratické funkce  $f$  a graf konstantní funkce  $g$ .  
Průsečíky grafů funkcí  $f$  a  $g$  jsou body  $A, B$ .



**Jaká je vzdálenost bodů  $A, B$ ?**

- A)  $2\sqrt{14}$
- B) 7,6
- C)  $2\sqrt{15}$
- D) 8
- E) jiná vzdálenost

Řešení.

Protože parabola na obrázku má kořeny  $+3$  a  $-3$ , tak musí mít rovnici  $y = a(x - 3)(x + 3)$ . Zbývá určit koeficient  $a$ . Vidíme, že parabola prochází bodem (vrcholem)  $V = [0; 9]$ , takže musí splňovat rovnici

$$9 = a(0 - 3)(0 + 3)$$
$$a = -1$$

Rovnice má tedy tvar  $y = -1(x - 3)(x + 3) = -x^2 + 9$ . Nyní určíme body  $A$  a  $B$ , protože mají  $y$ -ovou souřadnici  $y = -5$ . Vyřešíme rovnici

$$-x^2 + 9 = -5$$

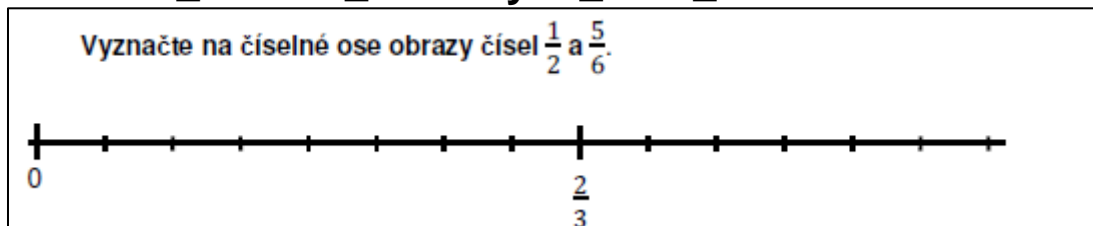
a máme kořeny  $x_1 = -\sqrt{14}$ ,  $x_2 = +\sqrt{14}$ . Máme tak body

$$A = [-\sqrt{14}; -5], B = [\sqrt{14}; -5],$$

jejichž vzdálenost je pochopitelně  $2\sqrt{14}$ . Odpověď je **(A)**.

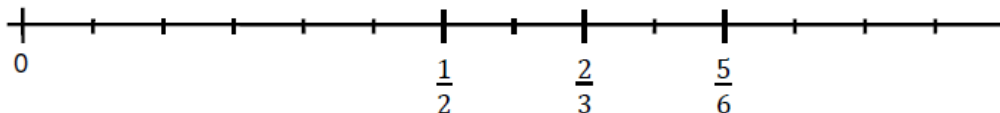
## 6 ČÍSELNÉ MNOŽINY

### 6.1 2013\_soubor\_vzorových\_úloh\_úloha 1



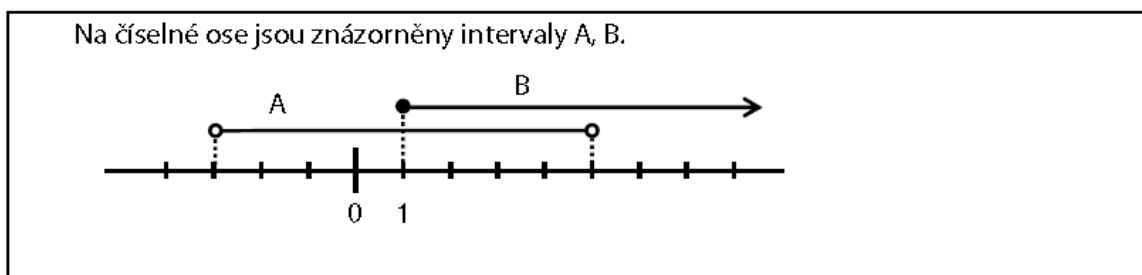
Řešení.

Abychom mohli zjistit, kde je  $\frac{1}{2}$ , musíme zjistit délku jednoho dílku. Vidíme, že osm dílků má délku  $\frac{2}{3}$ , tak délka jednoho dílku je  $\frac{\frac{2}{3}-0}{8} = \frac{2}{24} = \frac{1}{12}$ . Jedna polovina je šest dvanáctin, takže to bude šest dílků napravo od nuly. Pět šestin je 10 dvanáctin, tak to bude ještě dva dílky za  $\frac{2}{3} = \frac{8}{12}$ , viz obr.



### 6.2 2014P\_01

VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 1



(CERMAT)

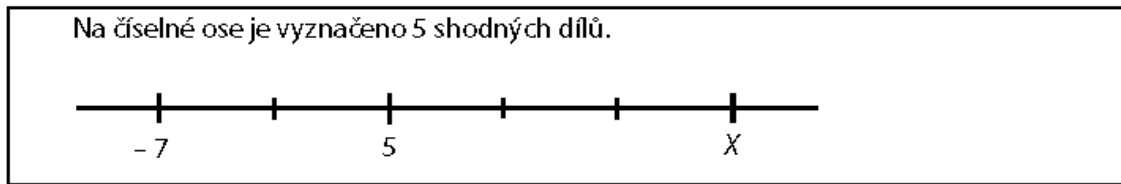
1 bod

1 Zapište intervalem  $A \cap B$ .

Řešení.  $A \cap B = (1; 5)$

## 6.3 2015J\_01

### VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 1



(CZW)

1 bod

- 1 Zapište číslo, jehož obrazem je bod X.

Řešení.

Mezi -7 a 5 je rozdíl 12, jsou to přesně dva dílky, takže jeden dílek má délku 6, bod X je tři dílky za pětkou, takže  $X = 5 + 3 \cdot 6 = 23$ . Řešení: 23.

## 6.4 2015J\_02

- 2 Uvedte všechna celá čísla, jejichž absolutní hodnota je menší než 3.

Řešení.

Řešíme vlastně nerovnici  $|x| < 3$ , ale jen v množině celých čísel  $\mathbf{Z}$ . Řešením jsou čísla -2, -1, 0, 1, 2. Zapsali bychom to například takto:

$$K = \{-2; -1; 0; 1; 2\}$$

## 6.5 2015-16\_katalog, úloha 1

- 1 Kolik celých čísel leží v intervalu  $(-\sqrt[3]{10^9}; \sqrt{10\,000})$ ?
- A) 1 099  
B) 1 100  
C) 1 101  
D) 10 099  
E) 11 001

Řešení. Nejprve musíme ten interval zjistit, tj. vypočítat  $-\sqrt[3]{10^9} = -10^3 = -1000$ ,  $\sqrt{10000} = 100$ . No a mezi čísla  $(-1000; 100)$  je (pozor na uzavřený a otevřený konec)  $1000 + 1(\text{nula}) + 99 = 1100$  čísel. Řešení je (B).

## 6.6 2016J\_02

- 1 Množina A obsahuje všechna reálná čísla, která jsou menší nebo rovna 5. Pro množinu B platí:  $B = (-7; 6)$ .  
Zapište intervalem  $A \cup B$ .

Řešení. Máme  $A = (-\infty; 5]$ ,  $B(-7; 6)$ , takže  $A \cup B = (-\infty; 6)$

## 6.7 2016P\_18

18 Na číselné ose je obraz čísla 1.

Které z následujících čísel má svůj obraz na číselné ose nejdále od obrazu čísla 1?

A)  $-\sqrt{3}$

B)  $-\frac{\pi}{2}$

D)  $\pi - 1$

C)  $\frac{\pi}{2}$

E)  $1 - \pi$

Řešení.

Musíme vlastně nakreslit všechna uvedená čísla a pak rozhodnout. Ještě musíme vzít v úvahu, že se jedná o vzdálenost od čísla 1. Klidně na kalkulačce vypočítáme

$$-\sqrt{3} = -1.73, -\frac{\pi}{2} = -1.57, +\frac{\pi}{2} = +1.57, \pi - 1 = 2.14, 1 - \pi = -2.14.$$

Na číselné ose jsou vzdálenosti (čili jsou to už kladná čísla, kladné vzdálenosti) od čísla +1 po řadě tyto:

$$2.73, \quad 2.57, \quad 0.57, \quad 1.14, \quad 3.14,$$

čili nejdále je evidentně 3.14, čili (E).

## 6.8 2019J\_02

2 Vypočtete 50 % z čísla  $2^{1000}$ .

Výsledek vyjádřete rovněž ve tvaru mocniny.

Řešení.

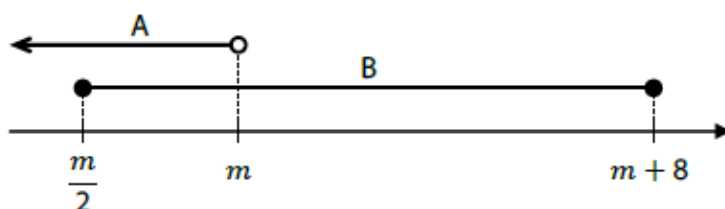
50 procent je jedna polovina, takže výsledek je

$$\frac{1}{2} \cdot 2^{1000} = 2^{1000-1} = 2^{999}$$

## 6.9 2022P\_01, vyznačení intervalů

Na číselné ose jsou znázorněny intervaly A, B.

Platí:  $A \cup B = (-\infty; 14)$



Zapište intervalem  $A \cap B$ .

Meze intervalu uveďte čísla, nesmějí obsahovat proměnnou  $m$ .

Řešení.

Protože  $A \cup B = (-\infty; m + 8)$ , plyne z toho  $m = 6$ . Potom  $A = (-\infty; 6)$  a  $B = \langle 3; 14 \rangle$ . Takže  $A \cap B = (-\infty; 6) \cap \langle 3; 14 \rangle = \langle 3; 6 \rangle$ .

## 6.10 2024J\_03, převod proměnných

Pro číselnou hodnotu  $t_C$  teploty ve stupních Celsia a číselnou hodnotu  $t_F$  téže teploty ve stupních Fahrenheita platí vztah:

$$t_F = 1,8t_C + 32$$

**Vypočtete, pro jakou teplotu ukáže teploměr ve stupních Celsia stejnou číselnou hodnotu jako teploměr ve stupních Fahrenheita.**

Řešení.

Protože hodnoty  $t_F$  a  $t_C$  mají být stejné, máme rovnici  $t_C = 1,8t_C + 32$ , tedy  $-32 = 0,8t_C$  a odtud  $t_C = -\frac{32}{0,8} = -40$ . Řešením je  $-40^\circ\text{C} = -40^\circ\text{F}$ .

## 7 VYJADŘOVÁNÍ NEZNÁMÉ ZE VZORCE

### 7.1 2014P\_07

7 Platí:  $3 - ab = 2a + b$ .

**Vypočtete hodnotu  $a$  pro  $b = \frac{1}{2}$ .**

Řešení.

Prostě dosadíme do rovnice za hodnotu  $b$  jednu polovinu a dostaneme rovnici

$$3 - \frac{a}{2} = 2 \cdot a + \frac{1}{2}$$

Vynásobíme dvěma:

$$\begin{aligned} 6 - a &= 4 \cdot a + 1 \\ 5 &= 5 \cdot a \\ a &= 1 \end{aligned}$$

Řešení bychom mohli zapsat jako  $\underline{a = 1}$  nebo  $\underline{K = \{1\}}$

### 7.2 2015J\_11

11 Pro veličiny  $a \in (0; 2)$ ,  $b \in \mathbb{R}^+$  platí:

$$1 + \frac{1}{b} = \frac{2}{ab}$$

**Z uvedeného vztahu vyjádřete veličinu  $a$ .**

Řešení.

Nejprve si připomeneme, že symbol  $\mathbb{R}^+$  znamená množinu kladných reálných čísel, tj. interval  $(0; +\infty)$ . Takže hledáme reálná čísla  $a \in (0; 2)$ ,  $b \in (0; +\infty)$  tak, že

$$1 + \frac{1}{b} = \frac{2}{ab}$$

Jak vidíme, čísla  $a$  i  $b$  jsou kladná, takže můžeme násobit číslem  $ab$  a dostáváme:

$$ab + a = 2$$

Když máme vyjádřit veličinu  $a$ , tak jí vytkneme a normálně pracujeme s rovnicí:

$$a \cdot (b + 1) = 2$$

Veličina  $b$  nemůže být  $-1$ , protože  $b$  je kladné, takže  $b \neq -1$  a rovnici můžeme dělit výrazem  $(b + 1)$ :

$$a = \frac{2}{b + 1}$$

=====

a to je řešení.

### 7.3 2015-16\_katalog, úloha 4

4 Pro veličiny  $r_1, r_2, f, n$  platí:

$$\frac{1}{f} = (n - 1) \left( \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right)$$

Které vyjádření veličiny  $f$  odpovídá uvedenému vztahu?

A)  $f = (n - 1)(r_1 + r_2)$

B)  $f = \frac{1}{n-1} (r_1 + r_2)$

C)  $f = \frac{r_1 r_2}{(n-1)(r_1+r_2)}$

D)  $f = \frac{(n-1)r_1 r_2}{r_1+r_2}$

E) žádné z uvedených

Řešení.

V první řadě napíšeme podmínky, aby výrazy měly smysl. Musí platit:

$$f \neq 0, r_1 \neq 0, r_2 \neq 0.$$

Potom můžeme převést zlomek na společný jmenovatel:

$$\frac{1}{f} = (n - 1) \cdot \frac{r_1 + r_2}{r_1 r_2}$$

Z rovnice vidíme podmínku  $r_1 + r_2 \neq 0$  a současně  $n \neq 1$ , protože zlomek nalevo není nikdy nula. Pak máme

$$\frac{1}{f} = \frac{(r_1 + r_2) \cdot (n-1)}{r_1 r_2} \text{ a odtud máme řešení (C):}$$

$$f = \frac{r_1 r_2}{(r_1 + r_2) \cdot (n - 1)}$$

=====

za podmínek:  $f \neq 0, r_1 \neq 0, r_2 \neq 0, r_1 + r_2 \neq 0, n \neq 1$ , i když ty nebyly požadovány.

=====

## 7.4 2016J\_07

7 Pro kladné veličiny  $a, b, c$  platí:

$$c = a - b \cdot \frac{c}{2}$$

**Z uvedeného vztahu vyjádřete veličinu  $c$ .**

Řešení.

Když máme vyjádřit veličinu  $c$ , tak jí převedeme na jednu stranu rovnice a vytkneme ji:

$$c + b \cdot \frac{c}{2} = a$$

$$c \cdot \left(1 + \frac{b}{2}\right) = a$$

Jak je napsáno v zadání,  $b$  je kladné, takže  $1 + \frac{b}{2}$  je kladné a můžeme s ním dělit, čili

$$c = \frac{a}{1 + \frac{b}{2}} = \frac{2a}{b + 2}$$

Řešení je tedy:

$$\underline{\underline{c = \frac{2a}{b + 2}}}$$

## 7.5 2020J\_03

3 Pro všechny kladné reálné hodnoty veličin  $a, b, c$  platí:

$$a : c = 3 : 10$$

$$b = 3a + c$$

**Vyjádřete co nejjednodušším způsobem veličinu  $b$  pouze v závislosti na veličině  $c$ .**

Řešení.

Jak je napsáno v zadání,  $c$  je kladné, takže jím můžeme vynásobit první rovnici a máme

$a = \frac{3c}{10}$ , což můžeme dosadit do druhé rovnice a dostaneme

$$b = 3 \cdot \frac{3c}{10} + c = \frac{9c}{10} + c = \frac{19}{10}c$$

Řešení je tedy:

$$\underline{\underline{b = \frac{19}{10} \cdot c}}$$

## 7.6 2025J\_02

### VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 2

Pohyb matematického kyvadla popisuje rovnice

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}},$$

kde  $T$  je perioda kyvu kyvadla,  $l$  je délka kyvadla a  $g$  je tíhové zrychlení.

(CZVV)

1 bod

2 Z uvedených rovnic vyjádřete délku kyvadla  $l$ .

Řešení.

Z fyziky víme, že všechny veličiny  $T$ ,  $l$ ,  $g$  jsou kladné a  $\pi$  samozřejmě také. Proto můžeme rovnici umocnit a máme

$$\begin{aligned} T^2 &= 4\pi^2 \cdot \frac{l}{g} \\ g \cdot T^2 &= 4\pi^2 \cdot l \\ l &= g \cdot \frac{T^2}{4\pi^2} \\ &===== \end{aligned}$$

nebo také

$$\begin{aligned} l &= g \cdot \left(\frac{T}{2\pi}\right)^2 \\ &===== \end{aligned}$$

## 8 LINEÁRNÍ ROVNICE, PROCENTA, ZLOMKY, PŘEVODY

### Lineární rovnice

#### 8.1 2014P\_06

6 Pro  $x \in \mathbb{R}; y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  řešte:

$$\frac{x+1}{y} = 4$$

$$\underline{2x - 4y = -6}$$

Řešení.

Jediným problémem je dělení proměnnou  $y$ , ale v zadání je zajištěno, že  $y$  není nula, čili můžeme první rovnici násobit. Pak máme soustavu rovnic

$$\begin{aligned} x + 1 &= 4y \\ 2x - 4y &= -6 \end{aligned}$$

Z první rovnice vyjádříme klasicky jednu proměnnou pomocí druhé a dosadíme do zbývajících rovnic:

$$\begin{aligned} x &= 4y - 1 \\ 2(4y - 1) - 4y &= -6 \end{aligned}$$

Z druhé rovnice vypočteme  $y$ :

$$\begin{aligned}2(4y - 1) - 4y &= -6 \\8y - 2 - 4y &= -6 \\4y &= -4 \\y &= -1\end{aligned}$$

a dopočteme

$$x = 4y - 1 = -4 - 1 = -5$$

Řešení je tedy

$$\underline{\underline{x = -5; y = -1}}$$

Cermat má jako řešení uvedeno  $K = \{-5; -1\}$ , což je trochu nezvyklé.

## 8.2 2017P\_05

**max. 2 body**

**5**    **Řešte soustavu rovnic s neznámými  $x, y, z \in \mathbb{R}$ :**

$$\begin{aligned}x + 2y &= -1 \\z - 2y &= -2 \\x - 2z &= -3\end{aligned}$$

**V záznamovém archu uveďte celý postup řešení.**

Řešení.

Úlohy tohoto typu se řeší na základní škole, a to vylučovací metodou.

Z první rovnice vyjádříme klasicky jednu proměnnou pomocí zbylých dvou (tady dokonce jedné)

$$x = -2y - 1$$

a dosadíme do zbývajících rovnic:

$$\begin{aligned}z - 2y &= -2 \\(-2y - 1) - 2z &= -3\end{aligned}$$

Máme dvě rovnice o dvou neznámých:

$$\begin{aligned}z &= 2y - 2 \\(-2y - 1) - 2(2y - 2) &= -3\end{aligned}$$

A druhá rovnice je

$$\begin{aligned}-2y - 1 - 4y + 4 &= -3 \\-6y + 3 &= -3 \\y &= 1\end{aligned}$$

a dopočteme

$$\begin{aligned}z &= 2y - 2 = 0 \\x &= -2y - 1 = -3\end{aligned}$$

Řešení je tedy

$$\underline{\underline{x = -3; y = 1; z = 0}}$$

Cermat má jako řešení uvedeno  $K = \{-3; 1; 0\}$ , což je trochu nezvyklé.

# Procenta

## 8.3 2017J\_11

### VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 11

Obchod při výprodeji snížil původní cenu zboží o 40 %. Navíc svým věrným zákazníkům rozeslal SMS zprávu s nabídkou další 15% slevy z ceny již zlevněného zboží.

(CZVV)

max. 2 body

- 11 Vypočtete, o kolik procent se původní cena zboží snížila věrným zákazníkům, kteří využili i slevu nabízenou v SMS zprávě.**

Řešení.

Původní cena zboží ... x Kč.

Při výprodeji cena .....  $x - (40\% \text{ z } x) = 60\% \text{ x} = \frac{60}{100} x$

Další sleva 15% z již zlevněné ceny.

Nová cena je  $\frac{60}{100} x - 15\% \text{ z } \frac{60}{100} x = \frac{60}{100} x - \frac{15}{100} \cdot \frac{60}{100} x = \frac{60}{100} x - \frac{900}{10000} x = \frac{6000 - 900}{10000} x = \frac{5100}{10000} x = \frac{51}{100} x$ . Nová cena je tedy 51% z původní ceny. Došlo tedy celkově ke zlevnění o 49%. Řešení: o 49%.

Rychlejší řešení je toto:

Původní cena zboží ... x Kč.

Při výprodeji se cena snížila o 40%, tedy na 60%  $x = \frac{60}{100} x$

Další sleva byla 15% z již zlevněné ceny, čili cena se snížila na 85% již zlevněné ceny

$(\frac{60}{100} x)$ . Takže nová cena je  $\frac{85}{100} \cdot \frac{60}{100} x = \frac{5100}{10000} x = \frac{51}{100} x$ .

Nová cena je tedy 51% z původní ceny. Došlo tedy celkově ke zlevnění o 49%.

Řešení: o 49%.

## 8.4 2020J\_01

### VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 1

Lék ve formě sirupu se prodává ve dvou variantách – pro děti a pro dospělé.  
V 1 ml sirupu pro děti jsou 3 mg účinné látky, v 1 ml sirupu pro dospělé 7,5 mg téže účinné látky.

Miloš má předepsáno užívat každé ráno 5 ml sirupu pro děti.

(CZVV)

**1 bod**

- 1 Vypočítejte, kolik ml sirupu pro dospělé by měl Miloš ráno užívat, aby dostával stejné množství účinné látky jako v předepsané dávce sirupu pro děti.**

Řešení.

Jedná se o klasickou slovní úlohu. To, co máme vypočítat, označíme  $x$ , čili Miloš by měl užít  $x$  ml sirupu pro dospělé. Toto množství obsahuje  $7,5 \cdot x$  ml účinné látky. Miloš má užívat 5 ml sirupu pro děti, což obsahuje  $5 \cdot 3$  ml = 15 ml účinné látky.

Máme tedy rovnici  $7,5x = 15$ . Odtud  $x = 2$ . Odpověď:

Miloš by měl ráno užít 2 ml sirupu pro dospělé.

=====

## 8.5 2024J\_02

### VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 2

Prodejce mobil zlevnil o 30 %, poté se začal mobil prodávat lépe. Prodejce zareagoval tak, že ho postupně dvakrát zdražil. První zdražení bylo o 20 % ze zlevněné ceny a pak ještě o 10 % z ceny po prvním zdražení. Výsledná cena po všech změnách je 11 088 Kč.

**2 body**

- 2 Vypočítejte původní cenu mobilu.**

Pomalé postupné řešení:

Původní cena mobilu ...  $m$  Kč. **To je nyní aktuální cena.**

Po zlevnění je cena .....  $m - (30\% \text{ z } m)$  Kč. To je  $m - \frac{30}{100}m = \frac{70}{100}m$ . **Nyní je aktuální cena ( $\frac{70}{100}m$ ).**

Nyní následuje zdražení o 20%. Ale je to zdražení aktuální ceny. Takže po zdražení o 20% je nová cena  $\frac{70}{100}m + \left(20\% \text{ z } \frac{70}{100}m\right) = \frac{70}{100}m + \frac{20}{100} \frac{70}{100}m = \frac{70}{100}m + \frac{14}{100}m = \frac{84}{100}m$ . **Nyní je aktuální cena ( $\frac{84}{100}m$ ).**

Po zdražení aktuální ceny o 10% je nová cena  $\frac{84}{100}m + \left(10\% \text{ z } \frac{84}{100}m\right) = \frac{84}{100}m + \frac{10}{100} \frac{84}{100}m = \frac{84}{100}m + \frac{8,4}{100}m = \frac{92,4}{100}m$

Výsledná cena je tedy  $\frac{92,4}{100}m$  o které říkají, že je 11088 Kč. Tedy  $\frac{92,4}{100}m = 11088$

a odtud  $m = 12000$  Kč.

Můžeme řešit rychleji, ale pozor na chyby:

Původní cena mobilu ...  $m$  Kč.

Po zlevnění o 30% je cena 70% z  $m$ . To je  $\frac{70}{100}m$ . **To je teď aktuální cena.**

Po prvním zdražení o 20% je cena 120% aktuální ceny, tj.  $\frac{120}{100}\left(\frac{70}{100}m\right) = \frac{84}{100}m$ . **To je teď aktuální cena.**

Po druhém zdražení o 10% je cena 110% aktuální ceny, tj.  $\frac{110}{100}\left(\frac{84}{100}m\right) = \frac{92400}{10000}m = \frac{92,4}{100}m$ .

Výsledná cena je tedy  $\frac{92,4}{100}m = 11088$  a odtud  $m = 12000$  Kč

## Zlomky, převody

### 8.6 2024P\_16

16 Délka 40 mm na mapě odpovídá vzdálenosti 20 km ve skutečnosti.

**Jaké je měřítko mapy?**

- A) 1 : 500
- B) 1 : 5 000
- C) 1 : 50 000
- D) 1 : 500 000
- E) jiný výsledek

Řešení.

Ke zjištění měřítka musíme najít odpovídající vzdálenost na mapě a ve skutečnosti ve stejných jednotkách. Často se říká 1 cm na mapě odpovídá 50 000 cm ve skutečnosti. Pak je měřítko 1 : 50 000. V této úloze tedy musíme převést 20 km na milimetry.

20 km ve skutečnosti je 20 000 metrů, což je 20 000 · 1000 milimetrů, tj. 20 000 000 milimetrů. 40 mm na mapě tedy odpovídá 20 000 000 milimetrům ve skutečnosti, měřítko tedy je  $40 : 20\,000\,000 = 1 : \frac{20\,000\,000}{40} = 500\,000$ . *Měřítko je tedy 1 : 500 000.* Řešení je **(D)**.

### 8.7 2024P\_19

19 Je dán zlomek  $\frac{\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}$ .

**Do kterého z následujících tvarů lze tento zlomek upravit?**

- A)  $\frac{1}{2}$
- B)  $1+\sqrt{2}$
- C) 1
- D)  $\sqrt{2}$
- E)  $\frac{\sqrt{2}}{2}$

Řešení.

Místo matematiky bychom mohli vzít kalkulačku a prostě všechny ty výrazy vypočítat. To je také povolené řešení. Některé úlohy lze řešit dosazováním, některé vtípem, některé matematickými postupy. Na kalkulačce klidně vypočítáme

$$\frac{\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}} = 2,41$$

A) je  $\frac{1}{2}$

B) je  $1 + \sqrt{2} = 2,41$

C) je 1

D) je 1,41

E) je 0,71

a máme řešení **(B)**.

Když to budeme řešit čistě matematicky, tak bychom si měli všimnout toho, že ve výsledcích A až E není nikde ve jmenovateli odmocnina, měli bychom se jí tedy ve výrazu

$$\frac{\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}$$

zbavit. Teď bychom si měli vzpomenout na vzorec pro rozdíl čtverců:

$$a^2 - b^2 = (a + b) \cdot (a - b).$$

Když zlomek rozšíříme výrazem  $2 + \sqrt{2}$ , tak ve jmenovateli právě vznikne

$$(2 + \sqrt{2}) \cdot (2 - \sqrt{2}) = 2^2 - (\sqrt{2})^2 = 4 - 2 = 2. \text{ Takže tím se té odmocniny zbavíme:}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2} \cdot (2 + \sqrt{2})}{(2 - \sqrt{2}) \cdot (2 + \sqrt{2})} = \frac{2\sqrt{2} + 2}{4 - 2} = \frac{2\sqrt{2} + 2}{2} = \sqrt{2} + 1$$

a je vyřešeno.

## 9 LINEÁRNÍ NEROVNICE

### 9.1 2015P\_26

26 Přiřadte ke každé nerovnici (26.1–26.3) řešení v oboru  $\mathbb{R}$  odpovídající množinu všech řešení (A–E).

26.1  $\frac{3-x}{-2} < -1$  \_\_\_\_\_

26.2  $\frac{2}{3-x} < 0$  \_\_\_\_\_

26.3  $\frac{3-x}{x-3} > 0$  \_\_\_\_\_

A)  $\emptyset$

B)  $(-\infty; 1)$

C)  $(-\infty; 3)$

D)  $(1; +\infty)$

E)  $(3; +\infty)$

Řešení.

26.1 Nerovnici můžeme vynásobit záporným číslem a obrátit znaménko:

$$\begin{aligned}3 - x &> 2 \\ 1 &> x\end{aligned}$$

Řešení je **(B)**, jinak bychom ho mohli zapsat jako  $x \in (-\infty; 1)$  nebo jako  $K = (-\infty; 1)$

26.2 Nerovnici NEmůžeme vynásobit neznámým číslem  $3 - x$  protože nevíme, jestli není záporné. Ale nastupuje tu jednoduchá úvaha – má-li být zlomek záporný (je to přece nerovnice typu „zlomek je menší než nula“), takže jmenovatel musí být záporný:

$$\begin{aligned}3 - x &< 0 \\ x &> 3\end{aligned}$$

Řešení je **(E)**, jinak bychom ho mohli zapsat jako  $x \in (3; +\infty)$  nebo jako  $K = (3; +\infty)$

26.3 Nerovnici můžeme krátit, ale pozor na podmínku  $x \neq 3$ . Po vykrácení dostáváme:

$-1 > 0$ , což není nikdy pravda. Proto řešení je **(A)**, jinak bychom ho mohli zapsat jako úloha nemá řešení nebo jako  $K = \emptyset$

## 9.2 2016J\_06

**6** V oboru  $\mathbf{R}$  řešte:

$$\frac{-2}{x-2} \leq 0$$

Řešení.

Nerovnici NEmůžeme vynásobit neznámým číslem  $x - 2$  protože nevíme, jestli není záporné. Ale nastupuje tu opět jednoduchá úvaha – má-li být zlomek záporný (je to přece nerovnice typu „zlomek je menší nebo roven nula“), takže jmenovatel musí být kladný:

$$\begin{aligned}x - 2 &> 0 \\ x &> 2\end{aligned}$$

Zároveň tím vyřešíme podmínku, že nedělíme nulou, tj.  $x \neq 2$ . Řešení bychom mohli zapsat jako  $x \in (2; +\infty)$  nebo jako  $K = (2; +\infty)$

## 9.3 2017P\_03

**3** V oboru  $\mathbf{R}$  řešte nerovnici:

$$2x - 1 > -2 + 2x$$

Řešení.

Pokud nerovnici upravíme (jako rovnici) odečtením  $2x$  od obou stran, dostaneme  $-1 > -2$ , což platí vždycky. Řešením jsou tedy všechna reálná čísla  $x$ . Řešení bychom mohli zapsat jako  $x \in (-\infty; +\infty)$  nebo jako  $K = (-\infty; +\infty)$  nebo jako  $K = \mathbf{R}$

## 9.4 2018J\_02

**2** V oboru  $\mathbf{R}$  řešte nerovnici a množinu všech řešení zapište intervalem.

$$\frac{14 - 2x}{-2} + 2 < 0$$

Řešení.

Nerovnici můžeme vynásobit záporným číslem a obrátit znaménko:

$$14 - 2x - 4 > 0$$

$$10 > 2x$$

$$5 > x$$

Řešení bychom mohli zapsat jako  $x \in (-\infty; 5)$  nebo jako  $K = (-\infty; 5)$

## 9.5 2019J\_23

**23** Pro kterou z následujících nerovnic s neznámou  $x \in \mathbb{R}$  je množinou všech řešení interval  $(-\infty; 0)$ ?

A)  $-2x < 0$

B)  $\frac{x}{x-1} < 0$

C)  $\frac{x}{-2} \geq 0$

D)  $\frac{2x}{x} < 0$

E)  $2x < x$

Řešení.

Když si nevíte rady, dosad'te nějaké číslo. Řešením mají být všechna záporná čísla, tak zkusme dosadit mínus jedničku. Vyřadíme A, B, D, zbývá C a E. Když se blíže podíváme na (E), můžeme odečíst  $x$  od obou stran nerovnice a dostaneme přesně:

$$x < 0$$

Řešení je tedy přesně (E).

## 9.6 2024P\_04, soustava lineárních nerovnic

**V oboru  $\mathbb{R}$  řešte soustavu nerovnic:**

$$\frac{1+3x}{4} > \frac{1-2x}{3}$$

$$-6x \leq 1-7x$$

Výsledek zapište pomocí intervalu.

Řešení.

Z první nerovnice dostáváme

$$\frac{1+3x}{4} > \frac{1-2x}{3}$$

Normálně násobíme nerovnici číslem 12, protože je kladné a chováme se k nerovnici jako k rovnici:

$$3+9x > 4-8x$$

$$17x > 1$$

$$x > \frac{1}{17}$$

$$\text{tj. } x \in \left(\frac{1}{17}; +\infty\right)$$

Z druhé nerovnice dostáváme

$$-6x \leq 1 - 7x$$

$$x \leq 1$$

$$\text{tj. } x \in (-\infty; 1)$$

Řešení musí vyhovovat oběma podmínkám tj.  $x$  musí být z průniku obou intervalů, což je  $(\frac{1}{17}; +\infty) \cap (-\infty; 1) = \frac{1}{17}; 1)$ . Řešení v maturitních úlohách můžeme zapsat jako

$$x \in (\frac{1}{17}; 1) \text{ nebo } K = (\frac{1}{17}; 1).$$

=====

## 9.7 2025P\_03

3 Určete všechna celá čísla  $k$ , která vyhovují oběma nerovnostem:

$$|\pi - 10| < k < \pi + 7$$

Řešení.

Víme, že  $\pi$  je přibližně 3,14, takže  $\pi - 10$  je rozhodně záporné, proto můžeme absolutní hodnotu odstranit takto:

$$10 - \pi < k < \pi + 7$$

Na kalkulačce si prostě vypočítáme čísla nalevo a napravo a máme

$$6,85 < k < 10,14$$

takže všechna celá čísla, která toto splňují jsou 7, 8, 9, 10. Řešení bychom mohli zapsat jako  $k \in \{7, 8, 9, 10\}$  nebo jako  $K = \{7, 8, 9, 10\}$

## 10 POSLOUPNOSTI

AP = aritmetická posloupnost,

GP = geometrická posloupnost,

### 10.1 2014P\_24, Vzorec obecné posloupnosti

První tři po sobě jdoucí členy posloupnosti jsou  $a_1 = 36$ ,  $a_2 = 12$ ,  $a_3 = 4$ .

**Který vzorec pro  $n$ -tý člen posloupnosti je možné pro tyto členy použít?**

A)  $a_n = 36 + 24^{-n}$

B)  $a_n = 52 - 16n$

C)  $a_n = 60 - 24n$

D)  $a_n = 108 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n$

E)  $a_n = 36 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n$

Řešení.

Například v bodě A) máme zadání pro obecný  $n$ -tý člen posloupnosti

$$a_n = 36 + 24^{-n}.$$

To znamená, že  $a_1$  je definováno jako  $a_1 = 36 + 24^{-1}$ , což evidentně není 36. Čili (A) nemůže být zápisem posloupnosti  $a_1 = 36, a_2 = 12, a_3 = 4$ . V bodě (B) nám nevyjde druhé číslo, v bodě (C) nevyjde třetí číslo a v bodě (D) vyjdou všechna tři čísla správně, takže (D) je zápisem naší posloupnosti  $a_1 = 36, a_2 = 12, a_3 = 4$ . Ještě důležitá poznámka, platná jen pro maturitu: jakmile narazíme u úlohy, kde jsou vyjmenovány možnosti, jako je tomu zde, tak už nemusíme pokračovat v řešení. U maturitních úloh platí pravidlo, že jen jedna odpověď a právě jedna odpověď je správná. Když na ní narazíme, už nemusíme hledat a zkoušet nic dalšího. Z tohoto důvodu je možná taktické začít řešit možnosti od konce :-)

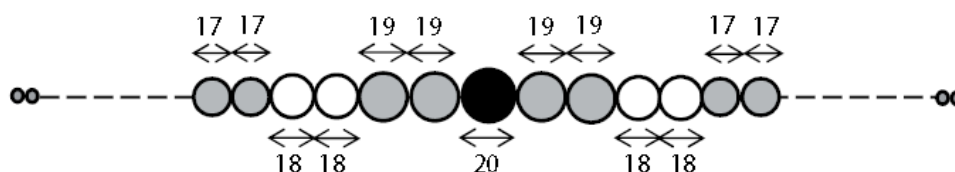
## Aritmetická posloupnost

### 10.2 2014P\_23, AP

Některé příklady mají složitější zadání, ale nakonec půjde jen o naše dva vzorce.

Na rovném drátě je navlečeno celkem **61** koráleků tvaru koule.

Uprostřed řady je největší korálek s průměrem 20 mm. Vedle něj jsou z každé strany dva korálky s průměrem 19 mm, potom dva korálky s průměrem 18 mm, dále dva korálky s průměrem 17 mm atd. V každé následující dvojici se průměr koráleků o 1 mm zmenší. Mezi korálky nejsou žádné mezery.



Rozměry uvedené v obrázku jsou v milimetrech.

Jak dlouhá je řada koráleků?

- A) kratší než 720 mm B) 730mm C) 740mm D) 750mm E) delší než 750 mm

Řešení.

Určitě to bude aritmetická posloupnost, protože "každý další korálek (člen aritmetické posloupnosti) je o 1 mm užší než předchozí", což je přesně definice difference  $d = -1$  (mm). Pozorně čteme, že je tam 61 koráleků, jeden je uprostřed, nalevo a napravo od něj je tedy 30 koráleků. Spočítáme jejich délku třeba napravo od černého. Je tam 30 koráleků, ale po dvou, takže 15 dvojic. Máme aritmetickou posloupnost, která klesá od 19 po jedné až k 5 (pozor na počet  $15 = 19 - 4$ , takže začínáme od korálku  $a_1 = 19$  mm a končíme korálkem  $a_{15} = 5$  mm). Zapišeme  $n = 15, a_1 = 19, d = -1$ . Délky koráleků sečteme:

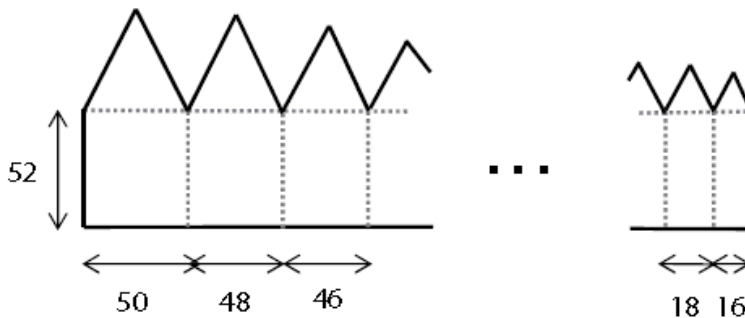
$$s_{15} = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{15} = (19 + 5) \frac{15}{2} = 12 \cdot 15 = 180.$$

Celkově 180 mm nalevo, ale po dvou, takže 360 mm, potom jeden uprostřed s délkou 20 mm a 360 mm napravo, to je  $s = 740$  mm. Takže řešení je (C). Použili jsme jen dva vzorce, a pravda, plus trochu logiky.

## 10.3 2015J\_24, AP

Souvislý rovinný obrazec se skládá z několika „domečků“ tvořených vždy obdélníkem a rovnostranným trojúhelníkem.

Šířka prvního obdélníku je 50 cm, každý následující obdélník je o 2 cm užší. Poslední obdélník má šířku 16 cm. Všechny obdélníky mají délku 52 cm.



Rozměry v obrázku jsou uvedeny v cm.

Jaký je obvod celého obrazce?

- A) 1688 cm    B) 1735 cm    C) 1784 cm    D) 1886 cm    E) jiný obvod

Řešení.

Určitě to bude aritmetická posloupnost, protože "každý další domeček (člen aritmetické posloupnosti) je o 2 cm užší než předchozí", což je přesně definice difference  $d = -2$  (cm). Pozorně čteme, že domečky tvoří posloupnost 50, 48, 46, ..., 16. Máme vypočítat obvod a oni říkají, že stříška je rovnostranný trojúhelník, takže základna i stříška (které sčítáme do obvodu) dohromady dávají 3 krát základnu. Za každý domeček tak máme trojnásobek základny do obvodu. K tomu připočteme dvě krajní délky 52 cm a máme obvod

$$\begin{aligned} \text{obvod} &= 3 \cdot (50 + 48 + 46 + \dots + 16) + 2 \cdot 52 = 3 \cdot (50 + 16) \frac{18}{2} + 104 \\ &= 3 \cdot 66 \cdot 9 + 104 = 1886. \end{aligned}$$

Takže řešení je **(D)**.

## 10.4 Pozor na počty prvků

V předchozím případě jsme museli jen spočítat, kolik je domečků, tj.  $n$ . Tady musíme dát velký pozor, protože v posloupnost 50, 48, 46, ..., 16 je kupodivu  $(50-14)/2=18$  prvků, a nikoli  $(50-16)/2=17$  prvků! U tohoto výpočtu se zastavíme, protože je klíčový. Například máme určit počet prvků v posloupnosti 18, 17, ..., 4. Tady je nutné vidět, že z posloupnosti 18, 17, ..., 4, **3, 2, 1** odebereme 3 prvky (1, 2, 3), nikoli 4 prvky, proto počet prvků bude o jedno vyšší než  $18 - 4$ . V našem příkladu máme posloupnost (když jí vydělíme dvěma) 25, 24, ..., 8, takže prvků je  $25-7=18$ !

Příklad. Řekněme, že máme posloupnost 11, 10, 9, 8. Kolik je to prvků? Jsou to čtyři prvky, o jedničku více, než je  $11 - 8$ , my totiž od 11 prvků neodčítáme 8, ale 7 prvků, protože osmý prvek je už v posloupnosti. Obecně pokud máme třeba posloupnost od počátečního čísla  $P$  do koncového čísla  $K$ , zvyšující se o 1, pak počet prvků v posloupnosti

$P, P + 1, P + 2, \dots, K - 2, K - 1, K$

je  $K - P + 1$

Vezměme si posloupnost 9, 10, 11. Jsou tu tři prvky, nikoli  $11 - 9 = 2$ , ale  $11 - 9 + 1 = 3$ .

## 10.5 2016P\_24, AP

Je dáno pět po sobě jdoucích členů aritmetické posloupnosti:

4,  $x$ ,  $y$ ,  $z$ ,  $-8$

Která hodnota vyjadřuje součet  $x + y + z$ ?

- A)  $-2$  B)  $-3$  C)  $-4$  D)  $-6$  E) žádná z uvedených

Řešení.

Jestli jsou čísla 4,  $x$ ,  $y$ ,  $z$ ,  $-8$  po sobě jdoucí členy aritmetické posloupnosti, tak podle prvního vzorce máme  $a_1 = 4$ ,  $x = a_1 + d$ ,  $y = a_1 + 2d$ ,  $z = a_1 + 3d$ ,  $-8 = a_1 + 4d$ . Z první a poslední rovnice vypočítáme  $a_1 = 4$ ,  $d = -3$ . Pak dosadíme dopočítáme  $x + y + z = (4 - 3) + (4 - 6) + (4 - 9) = -6$ . Řešení je (D).

## 10.6 2018P\_22, AP

V aritmetické posloupnosti s prvním členem  $a_1 = 2$  platí, že dvojnásobek součtu druhého a třetího členu této posloupnosti je roven trojnásobku čtvrtého členu této posloupnosti.

Do kterého intervalu patří diference té posloupnosti?

- A)  $(-1,5; -0,5)$   
B)  $(-0,5; 0,5)$   
C)  $(0,5; 1,5)$   
D)  $(1,5; 2,5)$   
E) Taková posloupnost neexistuje.

Řešení.

Máme dáno  $a_1 = 2$ . Dále je uvedeno, že  $2(a_2 + a_3) = 4a_4$ . Stačí do rovnice dosadit za  $a_2 = a_1 + d$ ,  $a_3 = a_1 + 2d$ ,  $a_4 = a_1 + 3d$  a dostaneme

$$2(a_1 + d + a_1 + 2d) = 4(a_1 + 3d)$$

$$4a_1 + 6d = 4a_1 + 12d$$

$$a_1 = 3d$$

$$d = \frac{2}{3}$$

Takže řešení je (C).

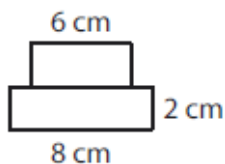
## 10.7 2020J\_15, AP

Zobrazené pyramidy jsou rovinné obrazce složené z obdélníků, které představují jednotlivá patra pyramidy.

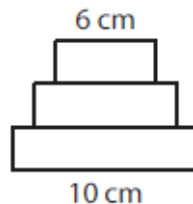
Každé patro je 2 cm vysoké.

Horní patro má vždy šířku 6 cm. Každé další patro je vždy o 2 cm širší než patro bezprostředně nad ním.

Pyramida se 2 patry



Pyramida se 3 patry



Pyramida se 4 patry



### 15 Vypočtete

15.1 v cm šířku spodního patra pyramidy, která má 200 pater,

15.2 v  $\text{cm}^2$  obsah pyramidy, která má 200 pater.

V záznamovém archu uveďte v obou částech úlohy celý postup řešení.

Řešení.

Určitě to bude aritmetická posloupnost, protože "každé další patro (člen aritmetické posloupnosti) je o 2 cm širší než předchozí", což je přesně definice difference  $d = 2$  (cm). A v úloze je zadán první člen  $a_1 = 6$  (cm). A chce se šířka 200. patra, takže  $a_{200}$ . Podle prvního vzorce máme odpověď:

$$a_{200} = a_1 + 199d = 6 + 199 \cdot 2 = 404 \text{ (cm)}.$$

Obsah pyramidy, která má 200 pater je vlastně součet obsahů těch malých obdélníků, které mají stejnou výšku. Takže součet obsahů bude součet těch základů, krát výška 2 cm. Součet základů je podle druhého vzorce

$$s_{200} = (a_1 + a_{200}) \frac{200}{2} = (6 + 404) \frac{200}{2} = 410 \cdot 100 = 41000.$$

Takže obsah pyramidy je  $41000 \cdot 2$  ( $\text{cm}^2$ ) = **82000  $\text{cm}^2$** . Použili jsme jen dva vzorce.

## 10.8 2023P\_09, AP

V rostoucí aritmetické posloupnosti  $(a_n)_{n=1}^{\infty}$  je pátý člen  $a_5 = 0$ .

Vypočtete, kolikrát je dvacátý člen  $a_{20}$  větší než desátý  $a_{10}$ .

Řešení.

Zdánlivě podivná úloha, ale s jednoduchým zadáním, proto má smysl jí řešit. Postupujeme striktně jako obvykle: všechno vyjádřit pomocí  $a_1$  a  $d$ , napsat rovnice, vyřešit.

Napišeme vztahy  $a_{20} = a_1 + 19d$ ,  $a_{10} = a_1 + 9d$ ,  $a_5 = a_1 + 4d = 0$ . Prostě řešíme tyto rovnice. Z poslední rovnice pro 5. člen dostaneme  $a_1 = -4d$ . a dosadíme rovnou do výrazu, který máme spočítat, tj. do

$$\frac{a_{20}}{a_{10}} = \frac{a_1 + 19d}{a_1 + 9d} = \frac{-4d + 19d}{-4d + 9d} = \frac{15d}{5d} = 3.$$

Odpověď je tedy: 3krát.

K počtům prvků se váže následující úloha, kde neznámou je netradičně právě počet prvků (viz též odstaveček výše).

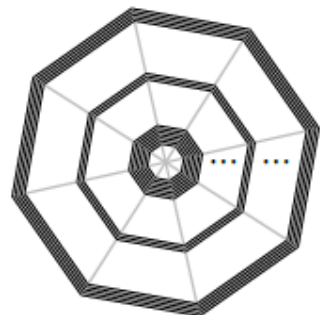
## 10.9 2025J\_22, AP

V husté dekorační pavučině jsou na drátěné konstrukci napnutá vlákna. Každé vlákno je napnuto kolem dokola a připevněno ke všem drátům konstrukce.

Nejkratší vlákno je nejblíže středu a jeho délka je 24 cm.

Každé další vlákno je o 4 mm delší než předchozí.

Poslední vlákno napnuté po obvodu pavučiny má délku 2 m.



Řešení.

Klíčovým údajem je, že první vlákno je  $a_1 = 24$  cm (= 240 mm) a že každé další vlákno je o 4 mm delší. To je aritmetická posloupnost s diferencí  $d = 4$  (mm). Neznámou je počet vláken  $n$ . Přitom říkají, že poslední vlákno má délku 2000 mm. Zapišeme to. I když počet vláken neznáme, poslední vlákno je  $a_n = 2000$ . Opět použijeme první vzorec:

$$a_n = a_1 + (n - 1)d$$

a dosadíme známé hodnoty:  $2000 = 240 + (n - 1)4$ . Odtud vypočteme

$$n = 1 + \frac{2000 - 240}{4} = 1 + \frac{1760}{4} = 1 + 440 = 441. \text{ Řešením je tedy (A).}$$

## Geometrická posloupnost

### 10.10 2015J\_23, GP

V geometrické posloupnosti s kladnými členy platí:

$$a_2 = \frac{81}{2}; \quad a_4 = \frac{1}{2}$$

**Do kterého z uvedených intervalů patří třetí člen  $a_3$  posloupnosti?**

A)  $\langle 1; 4 \rangle$     B)  $\langle 4; 8 \rangle$     C)  $\langle 8; 16 \rangle$     D)  $\langle 16; 32 \rangle$     E)  $\langle 32; 40 \rangle$

Řešení.

Vše záleží na členu  $a_1$  a kvocientu  $q$ . Tady ale vystačíme s tím, abychom určili kvocient. Z

logiky geometrické posloupnosti vyplývá, že  $q^2 = \frac{a_4}{a_2}$ , tj.  $q^2 = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{81}{2}} = \frac{1}{81}$ , a odtud  $q =$

$\frac{1}{9}$  nebo  $-\frac{1}{9}$ . Protože posloupnost má mít kladné členy, zbývá jen  $q = \frac{1}{9}$ , jinak by  $a_3$  bylo

záporné. Nyní máme  $a_3 = a_2 \cdot q = \frac{81}{2} \cdot \frac{1}{9} = \frac{9}{2} = 4,5$ . Řešením je (B).

## 10.11 2015P\_19, GP

V geometrické posloupnosti platí:

$$q = -2$$

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 15,4$$

Do kterého z uvedených intervalů patří první člen  $a_1$  posloupnosti?

A)  $(-8; 0)$  B)  $(0; 2)$  C)  $(2; 4)$  D)  $(4; 8)$  E) do žádného z uvedených

Řešení.

Toto je triviální příklad čistě na druhý vzorec. Máme sečíst  $n = 5$  členů geometrické posloupnosti s kvocientem  $q = -2$ . Máme na to vzorec a jen dosadíme:

$$s_5 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = a_1 \cdot \frac{(-2)^5 - 1}{(-2) - 1}$$

Oni říkají, že  $s_5 = 15,4$ , takže dosadíme do rovnice výše a máme

$$15,4 = a_1 \cdot \frac{(-2)^5 - 1}{(-2) - 1} = a_1 \cdot 11, \text{ tedy } a_1 = 1,4 \text{ a řešením je (B).}$$

Postup je vždy takový, že zapíšeme vše, co říkají pomocí  $a_1$ ,  $q$  a dvou vzorců, a pak rovnice vyřešíme. Máme pouze dvě neznámé:  $a_1$  a  $q$  !!!

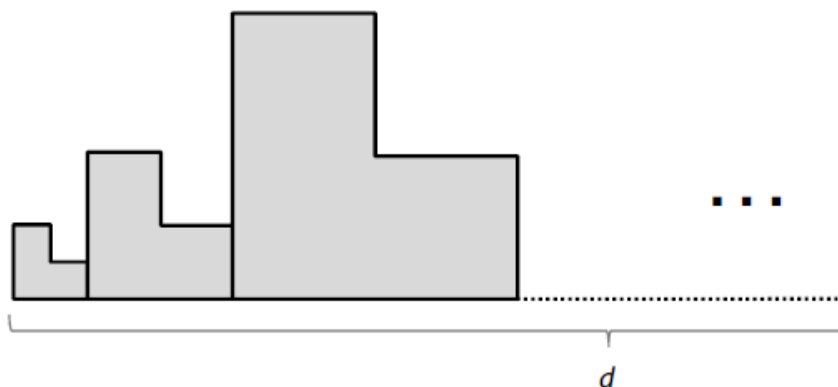
Uvedeme si složitější příklady. U nich platí to samé, jen na sestavení těch rovnic musíme přidat trochu logiky.

## 10.12 2018P\_08, GP

Obrazec je vytvořen z 9 dlaždic ve tvaru písmene „L“.

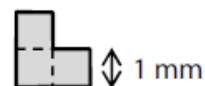
Dlaždice jsou umístěny těsně vedle sebe a postupně se zvětšují. Rozměry každých dvou sousedních dlaždic jsou v poměru 1 : 2.

Délku celého obrazce vytvořeného z 9 dlaždic označme  $d$ .



Každou dlaždici lze rozdělit na tři shodné čtverce.

První dlaždice je nejmenší. Její obsah je  $3 \text{ mm}^2$ .



**8** V obrazci vytvořeném z 9 dlaždic určete

8.1 obsah plochy **páté** nejmenší dlaždice (v  $\text{mm}^2$ ),

8.2 délku  $d$  **celého** obrazce (v mm).

**V záznamovém archu** uveďte v obou částech úlohy celý **postup řešení**.

Řešení.

Označíme délku první dlaždice  $a_1 = 2$  mm. Délka každé další dlaždice je dvojnásobkem délky předchozí dlaždice, takže je to geometrická posloupnost s kvocientem  $q = 2$ . Délka d celého obrazce je potom

$$s_9 = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_9 = a_1 \cdot \frac{(2)^9 - 1}{(2) - 1} = 2 \cdot 511 = 1022 \text{ (mm)}.$$

Pro Cermat napíšeme **d = 1022 mm**.

Plocha dlaždice jsou vždy 3 čtverce o délce poloviny základny, takže když je základna rovna  $x$ , tak plocha dlaždice je  $3 \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}x^2$ . Základna páté dlaždice je  $a_5 = a_1 \cdot (2)^4 = 16 \cdot 2 = 32$  (mm). Proto plocha páté dlaždice je  $\frac{3}{4} \cdot (32 \text{ mm})^2 = 768 \text{ mm}^2$ .

Pro Cermat napíšeme "**Plocha 5. dlaždice je 768 mm<sup>2</sup>.**"

Jak vidíme, úloha má delší zadání a její výpočet bude také asi trvat déle, musíme proto ihned na začátku zvážit, jestli tuto úlohu nechat na druhé kolo. Konkrétně tato úloha nebyla tak složitá, i když její zadání mohlo složitě vypadat, jenže to my na začátku řešení nevíme.

## 10.13 2024P\_11, GP

Nová sociální síť měla na konci prvního měsíce svého fungování 6 000 uživatelů. Každý další měsíc se počet uživatelů této sociální sítě zvýšil o polovinu oproti předchozímu měsíci.

**Jaký byl počet uživatelů na konci 4. měsíce fungování této sociální sítě?**

Řešení.

Klíčová informace je, že následující člen posloupnosti je o polovinu větší než předchozí. Takže je to geometrická posloupnost s kvocientem  $q = 1,5$ . Tuto úlohu jsme zařadili právě kvůli kvocientu. Je důležité umět zapsat například informaci, že následující člen je větší o 35% než předchozí. To znamená, že to je 1,35 násobek předchozího, tj.  $q = 1,35$ . Zde máme  $q = 1,5$ . Ostatní je triviální. Máme  $a_1 = 6000$ ,  $q = 1,5$  a máme vypočítat  $a_4 = a_1 \cdot q^3 = 6000 \cdot (1,5)^3 = 20250$ . Výsledek je 20250.

## 11 FINANČNÍ MATEMATIKA

### 11.1 2013\_soubor-vzorovych-uloh, úloha 11, odepisování hodnoty počítače

Počítač byl pořízen za 10 000 Kč. Každým následujícím rokem se z ceny počítače odepisuje vždy stejné procento ceny z předchozího roku. Po čtyřech letech se hodnota počítače sníží přibližně na 1 300 Kč.

Kolik procent (s přesností na 1 %) se každým rokem odepisuje z ceny počítače?

- A) méně než 22 %
- B) 22 %
- C) 34 %
- D) 40 %
- E) více než 40 %

Řešení.

Úloha je na složené úrokování, přičemž úrok  $p$  je neznámý. Daň se zde neplatí, čili  $k = 1$ . Cena majetku se snižuje, nikoli zvyšuje, takže ve vzorečku bude mínus:

$$I_4 = 10000 \cdot \left(1 - \frac{p \cdot 1}{100}\right)^4 = 1300.$$

Do vzorečku jsme jen dosadili hodnoty, které jsou v zadání. Vznikne rovnice s neznámou  $p$ , kterou řešíme takto:

$$\begin{aligned} 10000 \cdot \left(1 - \frac{p \cdot 1}{100}\right)^4 &= 1300 \\ \left(1 - \frac{p \cdot 1}{100}\right)^4 &= 0,13 \\ 1 - \frac{p \cdot 1}{100} &= \sqrt[4]{0,13} \\ 100 - p &= 100 \cdot \sqrt[4]{0,13} \\ 100 - 100 \cdot \sqrt[4]{0,13} &= p \\ p &= 40 \end{aligned}$$

Odpověď je (D)

Zkouška:

Na začátku je hodnota 10000 (Kč)

Po 1. roce je odpis  $0,40 \cdot 10000 = 4000$  a zůstatková hodnota je 6000

Po 2. roce je odpis  $0,40 \cdot 6000 = 2400$  a zůstatková hodnota je 3600

Po 3. roce je odpis  $0,40 \cdot 3600 = 1440$  a zůstatková hodnota je 2160

Po 4. roce je odpis  $0,40 \cdot 2160 = 864$  a zůstatková hodnota je 1296

Při odpisu 40% je zůstatková hodnota o málo menší než 1300 Kč, takže odpis je o malinko menší než 40%. Rozhodně ale nemůže být vyšší, ale ani tak málo jako 34%, takže odpověď je (D).

## 11.2 2013\_soubor-vzorovych-uloh, úloha 12, úroky z půjčky

Zdeněk si potřebuje půjčit částku 15 000 Kč. Dohodne se s věřitelem, že mu dluh splatí během roku v pěti pravidelných splátkách po 3 000 Kč. Ke každé splátce má navíc připlatit 5 % aktuálního dluhu. (Tedy při první splátce je to 5 % z 15 000 Kč, při poslední už jen 5 % ze 3 000 Kč.)

Kolik korun celkem připlatí Zdeněk k dlužné částce?

- A) 2070 Kč
- B) 2250 Kč
- C) 2750 Kč
- D) 3750 Kč
- E) jinou částku

Řešení.

Někdy je výhodné výpočet udělat „ručně“, pokud je splátek nebo let málo nebo si nejsme jistí vzorečkem.

Na začátku je dluh 15000 (Kč).

První splátka je 3000, zbývá splatit 12000 a navíc musí zaplatit 5% z **15000**, tj. 750 Kč

Druhá splátka je 3000, zbývá splatit 9000 a navíc musí zaplatit 5% z **12000**, tj. 600 Kč

Třetí splátka je 3000, zbývá splatit 6000 a navíc musí zaplatit 5% z **9000**, tj. 450 Kč

Čtvrtá splátka je 3000, zbývá splatit 3000 a navíc musí zaplatit 5% z **6000**, tj. 300 Kč

Pátá splátka je 3000, zbývá splatit 0 a navíc musí zaplatit 5% z **3000**, tj. 150 Kč

Celkem tak navíc připlatí  $750 + 600 + 450 + 300 + 150 = 2250$  Kč. Odpověď je **(B)**.

### 11.3 2013\_soubor-vzorovych-uloh, úloha 13, inflace

V Kocourkově se příjmy obyvatel každým rokem zvýší o 50 % oproti příjmům z předchozího roku. Během každého dvouletého období však peníze ztratí polovinu své hodnoty.

**Jak se změní hodnota příjmů po uplynutí 10 let?**

(Výsledek zaokrouhlete na procenta.)

- A) Zvýší se více než o 200 %.
- B) Zvýší se o 80 %.
- C) Nezmění se.
- D) Sniží se o 69 %.
- E) Sniží se o 94 %.

Řešení.

Tady je také trochu nestandardní situace, protože tu máme dvě období – jeden rok a dva roky. Ideální je tedy zjistit jak se změní hodnota peněz po dvou letech, a to potom pětkrát opakovat, čímž se spočítá hodnota peněz po deseti letech.

Na začátku je příjem  $P$  (třeba Kocourkovských korun).

Po prvním roce se hodnota ( $P$ ) zvýší o 50%, tj máme hodnotu  $1,5 \cdot P$ .

Po druhém roce se hodnota (nyní  $1,5 \cdot P$ ) zvýší o 50%, tj máme hodnotu  $1,5 \cdot (1,5 \cdot P) = 2,25 \cdot P$ .

Zároveň ale peníze ztratí polovinu hodnoty, takže místo  $2,25 \cdot P$  se jejich hodnota sníží na  $1,125 \cdot P$ .

Jinými slovy, po dvou letech se z hodnoty  $P$  stane  $1,125 \cdot P$ . To je nárůst o 12,5%. A máme složené úrokování, kdy těchto dvouletých období je pět. O daň se tu nejedná, tj.  $k=1$  a máme

$$I_5 = P \cdot \left(1 + \frac{12,5 \cdot 1}{100}\right)^5 = P \cdot \left(1 + \frac{12,5 \cdot 1}{100}\right)^5 = P \cdot \left(\frac{112,5}{100}\right)^5 = P \cdot (1,125)^5 = P \cdot 1,80.$$

Odpověď je **(B)**.

### 11.1 2015-16\_katalog, úloha 5, složené úrokování, úvěr

Majitel dílny nakoupil na úvěr s roční úrokovou mírou 10 % materiál v ceně 800 000 Kč, úroky se připsují koncem každého ročního úrokovacího období. Majitel splatí celou částku jednorázově po uplynutí pěti let.

**Vypočtete, o kolik procent splátka převýší úvěr.**

Řešení.

Toto je příklad přesně na vzorec složeného úrokování

$$I_n = I_0 \cdot \left(1 + \frac{p \cdot k}{100}\right)^n, \text{ kde } n = 5, I_0 = 800000, p = 10, k = 1 \text{ (není daň)}$$

takže

$$I_5 = 800000 \cdot \left(1 + \frac{10 \cdot 1}{100}\right)^5 = 800000 \cdot (1,1)^5 = 800000 \cdot 1,61051,$$

tedy splátka převyší úvěr o 61%. Odpověď je “o 61%”

## 11.2 2019P\_24, hypotéka

Banka u hypotečních úvěrů používá složené úročení s ročním úrokovacím obdobím a připisováním úroků na konci roku.

Banka poskytla klientovi na počátku roku hypoteční úvěr, který klient začal splácet až po uplynutí tří let. Za tuto dobu úroky navýšily dlužnou částku o 9,3 %.

**Jaká je roční úroková míra hypotečního úvěru?**

Výsledek je zaokrouhlen na desetiny procenta.

- A) menší než 2,9 %
- B) 2,9 %
- C) 3,0 %
- D) 3,1 %
- E) větší než 3,1 %

Řešení.

Text úlohy vlastně říká, že po tříletém období se počáteční jistina  $I_0$  (hypoteční úvěr) navýšila o 9,3%, tj. na hodnotu  $1,093 \cdot I_0$ . Zapišeme vzorec pro  $n=3$ , neznámý úrok  $p$ ,  $k=1$  (bez daně):

$$I_3 = I_0 \cdot \left(1 + \frac{p \cdot 1}{100}\right)^3,$$

Zároveň víme, že

$$I_3 = I_0 \cdot 1,093,$$

takže to dosadíme do rovnice výše a máme

$$\left(1 + \frac{p \cdot 1}{100}\right)^3 = 1,093$$

$$\left(1 + \frac{p \cdot 1}{100}\right) = \sqrt[3]{1,093} = 1,03008$$

a odtud  $p = 3\%$ . Řešení je (C).

## 11.3 2020P\_13, složené úrokování

V Kocourkově si klient založil účet a vložil na něj 2 000 zlatáků. Po uplynutí každého roku se aktuální částka na jeho účtu mávnutím proutku zvětší o polovinu.

Klient na účet žádné další peníze nevrkládá, ani je z účtu nevybírá.

### 13 Vypočtete,

- 13.1 kolik zlatáků bude mít klient na účtu po dvou letech od jeho založení,  
13.2 po kolika letech od založení účtu bude mít klient poprvé na účtu přes 1 milion zlatáků.

Řešení.

Úloha je na složené úrokování, přičemž úrok je  $p = 50\%$ , daň se zde platí nebo neplatí, to nevíme, ale víme, že zůstatek je fakticky o 50% vyšší, takže položíme  $k = 1$ . Po dvou letech bude mít klient na účtu

$$I_2 = 2000 \cdot \left(1 + \frac{50 \cdot 1}{100}\right)^2 = 2000 \cdot 2,25 = \mathbf{4500}.$$

Odpověď je „4500 zlatáků“.

Ptáme se, po kolika letech (označíme  $n$ ) bude mít na účtu poprvé přes milion zlatáků. Tedy v roce  $n-1$  tam ještě milion není, v roce  $n$  už milion nebo více. Řešíme tedy rovnici pro počet let  $n$ :

$$I_n = 2000 \cdot \left(1 + \frac{50 \cdot 1}{100}\right)^n = 1000000$$

$$\left(1 + \frac{50 \cdot 1}{100}\right)^n = 500$$

$$1,5^n = 500$$

jeden student mocnil 1,5 tak dlouho, až dostal 500, tj. určil  $n$ , ale my můžeme rovnici zlogaritmovat:

$$n \cdot \log 1,5 = \log 500$$

$$n = \frac{\log 500}{\log 1,5} = 15,32$$

Počet let je tedy větší než 15, čili  $n = 16$ , a odpověď je „**po 16 letech**“.

## 11.4 2025P\_15, dluhopis

Lenka nakoupila dluhopis za cenu 200 tisíc korun.  
Po uplynutí doby splatnosti dluhopisu Lenka obdržela 234 tisíc korun, což byla nákupní cena dluhopisu navýšená o úrok zdaněný 15% daní z příjmu.

**15 Rozhodněte o každém z následujících tvrzení (15.1–15.3), zda je pravdivé (A), či nikoli (N).**

- |   | A                        | N                        |
|---|--------------------------|--------------------------|
| 15.1 Lenka obdržela částku o 17 % vyšší, než byla nákupní cena dluhopisu. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| 15.2 Daň z úroku z Lenčina dluhopisu činila 6 000 korun.                  | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| 15.3 Úrok z dluhopisu byl před zdaněním o 15 % vyšší než po zdanění.      | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

Řešení.

Dluhopis má jednoduché úrokování. Po uplynutí doby splatnosti se prostě vyplatí pšedem stanovený úrok  $p\%$ . Ale odečte se od něj daň. Takže při jistině 200 000 bude vyplaceno

$$200000 \cdot \left(1 + \frac{p \cdot 0,85}{100}\right)^1 = 234000$$

Z té rovnice vypočteme úrok  $p$ .

$$1 + \frac{p \cdot 0,85}{100} = \frac{234000}{200000}$$

$$1 + \frac{p \cdot 0,85}{100} = 1,17$$

$$\frac{p \cdot 0,85}{100} = 0,17$$

$$p = \frac{17}{0,85} = 20.$$

Úrok byl tedy 20%, což je 40 000, ale po zdanění činil jen 34000. Daň byla tedy 6000 korun.

15.1 Lenka obdržela částku 234000, což je 1,17 násobek 200000, je to tedy o 17% vyšší, odpověď je (A).

15.2 Daň z úroku jsme vypočetli 6000 korun. Odpověď je (A).

15.3 Úrok z dluhopisu před zdaněním byl 40000, po zdanění 34000, je to tedy 1,18 násobek úroku po zdanění, tedy je o 18% vyšší. Odpověď je (N).

## 12 KOMBINATORIKA

### 12.1 2014J\_17

Trenér vybírá z 5 děvčat a 4 chlapců šestičlennou skupinu, v níž budou 3 dívky a 3 chlapci.

(CERMAT)

**17** Kolika způsoby lze šestičlennou skupinu za těchto podmínek sestavit?

- A) 16
- B) 20
- C) 40
- D) 180
- E) jiným počtem

**Řešení.**

Protože máme zadáno, že máme vybrat 3 dívky z 5 a 3 chlapce ze 4, známe počty těchto možností. Dívky můžeme vybrat  $\binom{5}{3}$  způsoby a chlapce  $\binom{4}{3}$  způsoby. Způsoby se násobí, takže celkem je to  $\binom{5}{3} \cdot \binom{4}{3}$  způsobů. Když použijeme „trik s malým číslem dole“, tak máme

$$\binom{5}{3} \cdot \binom{4}{3} = \binom{5}{2} \cdot \binom{4}{1} = \frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} \cdot \frac{4}{1} = 40$$

Odpověď je (C).

### 12.2 2015J\_25

Ze skupiny 10 dětí se vybírá **tříčlenná** skupina. Mezi dětmi je jediný Adam a jediná Bohunka. Vybraná skupina musí splňovat ještě některou z dalších stanovených podmínek.

(CZVV)

**25** Pro každou z následujících podmínek (25.1–25.4) určete, kolika způsoby (A–F) je možné tříčlennou skupinu vybrat.

- 25.1 Ve skupině není Adam ani Bohunka. \_\_\_\_\_
- 25.2 Ve skupině je Adam i Bohunka. \_\_\_\_\_
- 25.3 Ve skupině je Adam, ale není v ní Bohunka. \_\_\_\_\_
- 25.4 Ve skupině je Adam. \_\_\_\_\_

- A) 28,      B) 36,      C) 56,      D) 72,      E) 336,      F) *jiným počtem*

**Řešení.**

Nakreslíme si skupinu 10 dětí a označíme A jako Adama a B jako Bohunku

A	B	1	2	3	4	5	6	7	8
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

Zbývá 8 dětí.

25.1: Z osmi dětí 1-8 vybíráme tři, tj.  $\binom{8}{3} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 56$

25.2: Z osmi dětí 1-8 vybíráme jedno, tj.  $\binom{8}{1} = \frac{8}{1} = 8$

25.3: Z osmi dětí 1-8 vybíráme dvě, tj.  $\binom{8}{2} = \frac{8 \cdot 7}{1 \cdot 2} = 28$

25.4: Z devíti dětí (B,1-8) vybíráme dvě, tj.  $\binom{9}{2} = \frac{9 \cdot 8}{1 \cdot 2} = 36$

Řešení je CFAB.

### 12.3 2015P\_18

Osm spolužáků (Adam, Bára, Cyril, Dan, Eva, Filip, Gábina a Hana) se má seřadit za sebou tak, aby Eva byla první a Dan předposlední.

(CZVV)

**Kolika způsoby to lze udělat?**

- A) 5040,      B) 2880,      C) 1440,      D) 720,      E) *jiným počtem*

**Řešení.**

Nakreslíme si řadu 8 míst a umístíme Evu a Dana tam, kde mají stát.

E	1	2	3	4	5	D	6
---	---	---	---	---	---	---	---

Zbývá tedy rozřadit 6 spolužáků. Jde o to slovo „řada, řadit“, zde záleží na pořadí, není to jen „skupina“. Je to řada. Tato úloha se řeší následovně. Na místo č. 1 můžeme postavit 6 spolužáků, máme 6 možností, koho tam postavit. Na místo č. 2 můžeme postavit kohokoliv z 5 zbývajících spolužáků. Na místo č. 3 můžeme postavit kohokoliv ze 4 zbývajících spolužáků. Na místo č. 4 můžeme postavit kohokoliv ze 3 zbývajících spolužáků. Na místo č. 5 můžeme postavit kohokoliv ze 2 zbývajících spolužáků a na místo č. 6 můžeme postavit už jen jednoho zbývajících spolužáka. Celkem máme  $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6!$  možností (720). Tento příklad je čistý příklad permutace. Máme uspořádat (seřadit) 6 lidí na šest míst, to je přesně „permutace“ 6 lidí. Permutace ve smyslu jazykovém i ve smyslu matematickém. Řešení je (D).

### 12.4 2017P\_22

Každý člen výpravy (řidič, dvě učitelky a 27 studentů) si zakoupil jednu slosovatelnou vstupenku. Z těchto 30 vstupenek budou čtyři vylosovány a jejich majitelé získají některou z cen.

(CZVV)

**22 Jaká je pravděpodobnost, že všechny čtyři ceny získají jen studenti?**

Hodnota pravděpodobnosti je zaokrouhlena na setiny.

- A) 0,12      B) 0,15      C) 0,64      D) 0,68      E) *jiná pravděpodobnost*

**Řešení.**

Nakreslíme si skupinu 30 lidí a označíme Ř jako řidiče, U1, U2 dvě učitelky a S1 až S27 studenty:

Ř	U1	U2	27 studentů
---	----	----	-------------

Znění úlohy je takové, že: Ř, U1 a U2 nejsou vylosováni a 4 z 27 studentů jsou vylosováni. Pravděpodobnost spočítáme jako

$$p = \frac{\text{počet všech příznivých výsledků}}{\text{počet všech možných výsledků}}$$

Počet všech příznivých výsledků je počet všech možných výběru 4 výherců z 27. To je

$$\binom{27}{4} = \frac{27 \cdot 26 \cdot 25 \cdot 24}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 17550$$

Počet všech možných výsledků, tj. možných losování je počet výběru 4 lidí z 30, což je

$$\binom{30}{4} = \frac{30 \cdot 29 \cdot 28 \cdot 27}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 27405$$

Potom  $p = \frac{17550}{27405} = 0,64$ . Řešení je (C).

## 12.5 2021J\_24

Z šesti číslic 0, 1, 2, 3, 4, 5 vytváříme pětimístná (neboli pěticiferná) čísla, v jejichž zápisu jsou v každé trojici sousedních číslic tři různé číslice. (Pětimístné číslo nezačíná číslicí 0.)  
 Např. v zápisu pětimístného čísla 10 240 obsahuje každá trojice sousedních číslic (tj. 102, 024 a 240) tři různé číslice.

(CZW)

### 24 Kolik pětimístných čísel splňujících uvedené podmínky lze vytvořit?

- A) 720      B) 1024,      C) 1600,      D) 1920,      E) 2000

Toto je typický příklad úlohy, kterou je nutné přeskočit. Už jenom pochopení konstrukce čísel je složité, natož výpočet. Není u ní zřejmé ihned, jak se bude řešit, takže je taktické ji přeskočit a vrátit se, až budeme mít všechno ostatní hotové. Pokud ne, udělali jsme dobře, protože u maturity jsou rozhodně jednodušší úlohy, kterým dáme přednost, a můžeme za ně získat body.

### Řešení.

Ono to řešení není tak těžké, ale musíme se naučit přeskakovat úlohy, které nám nejsou jasné hned od začátku. Klidně se k nim můžeme vrátit, až vyřešíme vše, co je nám jasné a umíme.

Uděláme si náskres [VK]:

1				
2				
3				
4				
5				

5 5 4 4 4

Na prvním místě může být 5 číslic, protože nula tam být nemůže.

Na druhém místě nemůže být číslice, co byla na prvním místě, jinak všechny, tj. 6-1=5 číslic.

Na třetím místě nemůže být číslice, co byla na prvním nebo druhém místě, tj. zbývají 4 možnosti.

Na čtvrtém místě už musíme použít pravidlo, že žluté číslice musí být různé. Dvě máme už obsazené, takže zbývá 6-2=4 číslic

Na pátém místě už musíme použít pravidlo, že zelené číslice musí být různé. Dvě máme už obsazené, takže zbývá  $6-2=4$  číslic

Celkem se tyto možnosti násobí, takže je  $5 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 1600$  možností. Řešení je (C).

## 12.6 2022J\_23

V balíčku je 10 karet, z nichž právě 4 karty jsou esa.

Z balíčku náhodně vybereme 5 karet.

(CZW)

**23** Jaká je pravděpodobnost, že mezi vybranými pěti kartami budou právě 3 esa?

- A)  $\frac{1}{42}$ , B)  $\frac{2}{21}$ , C)  $\frac{3}{5}$ , D)  $\frac{5}{21}$ , E) jiná hodnota pravděpodobnosti

**Řešení.**

Pravděpodobnost spočítáme jako

$$p = \frac{\text{počet všech příznivých výsledků}}{\text{počet všech možných výsledků}}$$

Počet všech možných výsledků je to, že z 10 karet vybereme 5 karet. To můžeme udělat

$$\binom{10}{5} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 252 \text{ způsoby.}$$

Příznivý výsledek jsou tři esa a k tomu dvě libovolné karty. Tři esa vybíráme ze 4 es, tj. máme  $\binom{4}{3}$  možností. K tomu přidáme dvě libovolné karty, co nejsou esa, tj. vybíráme dvě

karty z 6 „ne esových“ karet, to je  $\binom{6}{2}$  možností. Když ty možnosti zkombinujeme, máme

$$\text{celkem } \binom{4}{3} \cdot \binom{6}{2} = \frac{4}{1} \cdot \frac{6 \cdot 5}{1 \cdot 2} = 60 \text{ možností.}$$

Potom  $p = \frac{60}{252} = \frac{5}{21}$ . Řešení je (D).

## 12.7 2022P\_23

Karel má na zámku u kola kód se 6 znaky.

Na prvním i druhém místě kódu je možné nastavit kterékoli z 5 možných písmen A, B, C, D, E a na každém z dalších čtyř míst libovolnou číslici od 1 do 9.

Karel správný kód zapomněl, pamatuje si pouze, že první písmeno je E a poslední číslice 7.

Pokouší se zámek otevřít tak, že (bez prodlev) nastavuje navzájem různé kódy začínající písmenem E a končící číslicí 7 (např. EB7897, EE1117).

(CZW)

23 Předpokládejme, že nastavení a ověření každého kódu trvá Karlovi 1 sekundu.

**Jak dlouho může Karlovi nejvýše trvat otevření zámku?**

- A) méně než 40 minut
- B) alespoň 40 minut, ale méně než 50 minut
- C) alespoň 50 minut, ale méně než 60 minut
- D) alespoň 60 minut, ale méně než 70 minut
- E) alespoň 70 minut

**Řešení.**

Tato úloha má příliš dlouhé zadání a nebude triviální. Je potřeba ji přeskočit. Když jí přeskočíme a máme čas se k ní vrátit, uvidíme, že řešení JE skoro triviální. Nicméně správný postup je úlohu nejprve přeskočit. Úlohy s dlouhým zadáním nebývají jednoduché a rychle řešitelné. Toto je výjimka. Tak na druhý pokus ji můžeme vyřešit.

Uděláme si náskres ([VK])

E				7
---	--	--	--	---

A	1	1	1
B	2	2	2
C	3	3	3
D	4	4	4
E	5	5	5
	6	6	6
	7	7	7
	8	8	8
	9	9	9

Na každém místě jsme vyjmenovali znaky které zde mohou být a nijak se neovlivňují ani nepodmiňují. Proto počet kombinací je prostý součin  $5 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 = 3645$ , což bude trvat 3645 sekund. Odpověď je jedna hodina a 45 sekund. Řešení je (D).

# 13 PRAVDĚPODOBNOST A STATISTIKA

## Pravděpodobnost samotná

### 13.1 2015J\_19, medián



**Kolik písemných prací bylo oznámkováno?**

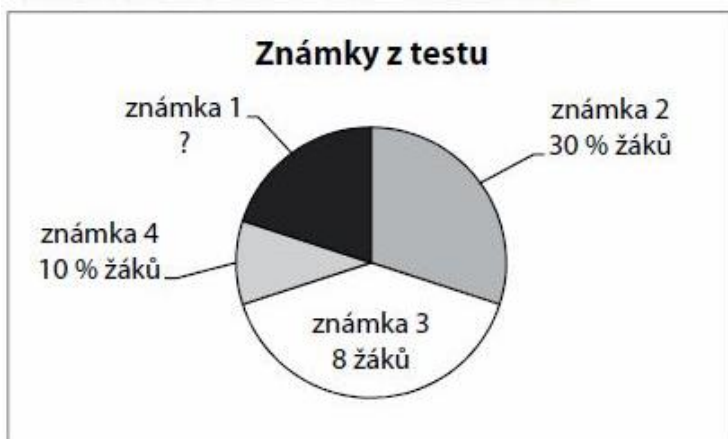
A) 16, B) 17, C) 18, D) 19, E) jiný počet

Řešení.

Důležité je, že je zadán Medián = 2,5. Protože medián je uprostřed všech hodnot, a to je řada celých čísel, medián musel být mezi dvojkou a trojkou, jinak by hodnota 2,5 nemohla vzniknout. Mezi dvojkou a trojkou je tedy přesně čára, která dělí počet známek vlevo a vpravo od dělicí čáry přesně na polovinu. Vpravo od mediánu je  $5 + 2 + 1 = 8$  známek, takže vlevo od mediánu musí být také 8 známek. Čili celkem bylo 16 známek, což je odpověď (A).

### 13.2 2015P\_16, medián, modus, průměr

Graf udává rozložení známek z testu u 20 žáků. Pětku nedostal nikdo.



Rozhodněte o každém z následujících tvrzení, zda je pravdivé (A) nebo není (N).

- |      |  |                          |                          |
|------|--|--------------------------|--------------------------|
|      |  | <b>A</b>                 | <b>N</b>                 |
| 16.1 | Počet žáků, kteří získali známku 1 nebo 2, je stejný jako počet žáků, kteří získali známku 3 nebo 4. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| 16.2 | Aritmetický průměr známek je 2,4.  | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| 16.3 | Medián je 3.   | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| 16.4 | Modus je 3.  | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

Řešení.

V úloze je 20 žáků. Znamku 4 má 10%, tj. 2 žáci. Znamku 3 má 8 žáků, známku 2 má 30%, tj. 6 žáků a zbývá  $20 - 2 - 8 - 6 = 4$  žáci, kteří mají známku 1. Tím je všechno určeno.

Modus je nejčastější známka, tj. 3.

Aritmetický průměr známek je  $(4 \cdot 2 + 3 \cdot 8 + 2 \cdot 6 + 4 \cdot 1) / 20 = 48 / 20 = 2,4$ .

Medián vypočteme tak, že seřadíme známky od 1 do 4:

1 1 1 1 2 2 2 2 2 2 2 3 3 3 3 3 3 3 3 3 4 4

Známek je sudý počet, takže medián je průměr mezi dvěma prostředními známkami, a to je 2 a 3, tj. medián je 2,5.

Odpovědi : A,A,N,A.

### 13.3 2016P\_09, medián, modus, průměr

Ze čtvrtletní práce získalo 22 žáků 3. B následující známky:

3, 4, 2, 5, 4, 3, 4, 2, 1, 4, 3, 4, 5, 2, 4, 3, 2, 4, 5, 1, 3, 4

známka	1	2	3	4	5	celkem
četnost						22

Určete medián a modus známek ze čtvrtletní práce.

Řešení.

22 známek MUSÍME srovnat do řady podle hodnoty ([VK]):

1, 1, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5

známka	1	2	3	4	5	celkem
četnost	2	4	5	8	3	22

Medián je průměr ze dvou prostředních hodnot, protože máme sudý počet hodnot (22). Takže je to průměr z 11. a 12. hodnoty, což je  $(3 + 4) / 2 = 3,5$ . Medián = 3,5.

Modus je nejčastější známka, což je čtyřka. Modus = 4.

Pro zajímavost, průměr známek je

$$\frac{\text{součet známek}}{\text{počet známek}} = \frac{1 + 1 + 2 + \dots + 5 + 5}{22} = \frac{1 \cdot 2 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 5 + 4 \cdot 8 + 5 \cdot 3}{22} = \frac{72}{22} = 3,27$$

## 13.4 2018J\_10 a 2018J\_11, statistika, průměr

### VÝCHOZÍ TEXT A TABULKA K ÚLOHÁM 10–11

Soutěž má dvě kola. Body z obou kol se sčítají.

Soutěžící byli na počátku soutěže rozděleni do dvou skupin. V těchto skupinách absolvovali první i druhé kolo soutěže. Průměrné výsledky jsou uvedeny v tabulce.

	Počet soutěžících	Průměrný bodový zisk na osobu		
		První kolo	Druhé kolo	Celá soutěž
Skupina A	20	3,0	4,4	
Skupina B	30	4,0	4,4	
Všichni	50			

**10 Vypočtete průměrný bodový zisk na osobu v prvním kole soutěže.**

(Počítejte se všemi 50 soutěžícími.)

**11 Vypočtete průměrný bodový zisk na osobu v celé soutěži.**

(Počítejte se všemi 50 soutěžícími.)

Řešení.

V prvním kole soutěžilo 20 lidí ve skupině A, kteří měli průměrný zisk 3,0, čili všichni dohromady získali  $20 \cdot 3,0 = 60$  bodů. Ve skupině B soutěžilo 30 lidí s průměrným ziskem 4,0 bodu, takže celkem získali  $30 \cdot 4,0 = 120$  bodů. Obě skupiny dohromady (50 lidí) získaly  $60 + 120 = 180$  bodů. Průměrný počet bodů v prvním kole je proto  $180/50 = \mathbf{3,6}$  bodů

V druhém kole soutěžilo 20 lidí ve skupině A, kteří měli průměrný zisk 4,4 bodu, čili všichni dohromady získali  $20 \cdot 4,4 = 88$  bodů. Ve skupině B soutěžilo 30 lidí s průměrným ziskem 4,4 bodu, takže celkem získali  $30 \cdot 4,4 = 132$  bodů. Obě skupiny dohromady (50 lidí) získaly  $88 + 132 = 220$  bodů.

Sečteme-li získané body v 1. a 2. kole soutěže, dostáváme  $180 + 220 = 400$  bodů, na 50 lidí, proto průměrný bodový zisk v soutěži je  $400/50 = \mathbf{8}$  bodů

### 13.5 Relativní četnosti

Ve 30 rodinách byly zjišťovány počty dětí. Byly zjištěny tyto výsledky:

1,1,0,2,3,4,2,2,3,0,1,2,2,4,3,3,0,1,1,1,2,2,0,2,1,1,2,3,3,2.

Vypočtete průměr, modus, medián a relativní četnosti dětí (v procentech).

Řešení je vidět v tabulce ([VK]):

Počet dětí	absolutní četnost	relativní četnost		relativní četnost v procentech	
0	4	= 4/30=	0,13	13	medián = 2
1	8	= 8/30=	0,27	27	modus = 2
2	10	= 10/30=	0,33	33	průměr = $0 \cdot 4 + 1 \cdot 8 + 2 \cdot 10 + 3 \cdot 6 + 4 \cdot 2 = 54 / 30 = 1,8$
3	6	= 6/30=	0,20	20	
4	2	= 2/30=	0,07	7	
součet	30	= 30/30=	1,00	100	

0 0 0 0 1 1 1 1 1 1 1 1 2 2 2 2 2 2 2 3 3 3 3 3 3 4 4

### 13.6 2018P\_07, medián

V soutěži bylo možné získat 0 až 6 bodů.

Výsledky soutěžících jsou zaznamenány v tabulce, ale jeden údaj chybí.

S doplněným údajem bude medián počtu získaných bodů 5.

Počet získaných bodů	0	1	2	3	4	5	6
Počet soutěžících	2	2	5	1	5		6
Medián počtu získaných bodů	5						

Určete **nejmenší možný počet soutěžících, kteří získali 5 bodů.**

Řešení.

Body máme srovnané dořady podle velikosti, takže medián je buď uprostřed nebo průměr ze dvou prostředních hodnot. Musíme nyní popřemýšlet, jak může vzniknout medián 5 bodů. Není to ani 4, ani 4,5, ani 5,5, je to přesně 5. Z toho plyne, že ten prostřední bod nebo dva prostřední body (z kterých se počítá medián) musí být buď 5 (jeden bod, lichý počet soutěžících) nebo 5 + 5 (dva body, sudý počet soutěžících), tedy v obou případech se musí nacházet přesně v tom políčku, kde neznáme počet soutěžících. Soutěžících, kteří mají 0-4 body, je 15, proto napravo od mediánu musí být také minimálně 15 soutěžících, takže *minimálně* máme 15 soutěžících nalevo, jeden nebo dva soutěžící (z kterých se počítá medián) a 15 soutěžících napravo, dohromady minimálně 31 soutěžících. Z toho vyplývá minimální počet 10 soutěžících s pěti body. Pokud to tak je, soutěžích je lichý počet a prostřední hodnota je opravdu 5 bodů, tj. řešení je 10. Odpověď má být: **10 soutěžících.**

# Pravděpodobnost ve spojení s kombinatorikou

## 13.7 2014J\_16, pravděpodobnost, hod kostkou

**16** Hází se jedenkrát běžnou šestistěnnou hrací kostkou s čísly od 1 do 6.  
**Rozhodněte o každém z následujících tvrzení (16.1–16.4), zda je pravdivé (ANO), či nikoli (NE).**

- |  | <b>A</b>                 | <b>N</b>                 |
|--|--------------------------|--------------------------|
| 16.1 Pravděpodobnost, že padne sudé číslo, je $\frac{1}{2}$ .        | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| 16.2 Pravděpodobnost, že padne číslo větší než 4, je $\frac{1}{4}$ . | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| 16.3 Pravděpodobnost, že padne číslo menší než 3, je $\frac{1}{3}$ . | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| 16.4 Pravděpodobnost, že <b>nepadne</b> číslo 6, je $\frac{1}{6}$ .  | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

Řešení. Máme

$$p = \frac{\text{počet všech příznivých výsledků}}{\text{počet všech možných výsledků}}$$

Když hodíme kostkou, tak počet možných výsledků je 6

16.1 Sudé výsledky jsou tři. Takže  $p = 3/6 = 1/2$ , odpověď je A.

16.2 Čísla větší než 4 jsou dvě. Takže  $p = 2/6 = 1/3$ , odpověď je N.

16.3 Čísla menší než 3 jsou dvě. Takže  $p = 2/6 = 1/3$ , odpověď je A.

16.4 Počet možností, že nepadne číslo 6 je 5 (1, 2, 3, 4, 5). Takže  $p = 5/6$ , odpověď je N.

## 13.8 2016J\_24, pravděpodobnost losování

Ze 3 chlapců a 4 dívek se losují dva hráči do hry. První vylosovaný bude kapitán, druhý kormidelník.

**Jaká je pravděpodobnost, že kapitánem bude chlapec?**

- A)  $\frac{1}{7}$ , B)  $\frac{3}{7}$ , C)  $\frac{4}{7}$ , D)  $\frac{1}{3}$ , E) jiná pravděpodobnost

Řešení č. 1, systematické, založené na výčtu. Pravděpodobnost lze spočítat jako

$$p = \frac{\text{počet všech příznivých výsledků}}{\text{počet všech možných výsledků}}$$

Počet všech možných výsledků je  $7 \cdot 6 = 42$ , protože na první místo vybíráme ze 7 osob a na druhé místo ze šesti zbylých.

U každého možného výsledku losování zapíšeme, kdo byl první vybraný a druhý vybraný:

CH CH ..... celkem máme  $3 \cdot 2 = 6$  možností

CH D ..... celkem máme  $3 \cdot 4 = 12$  možností

D CH ..... celkem máme  $4 \cdot 3 = 12$  možností

D D ..... celkem máme  $4 \cdot 3 = 12$  možností

Počet příznivých možností je  $6 + 12 = 18$  (první dva řádky), takže pravděpodobnost je  $p = 18/42 = 3/7$ . Řešení je **(B)**.

Řešení č. 2, chytřejší.

Počet příznivých možností je když na první místo vybereme chlapce, což jsou tři možnosti, a na druhé místo můžeme vybrat kohokoli z 6 zbývajících, takže  $3 \cdot 6 = 18$ .

### 13.9 2016P\_22, pravděpodobnost, kombinatorika

Ve skupině jede 50 cyklistů. Celkem 10 z nich se provinilo konzumací alkoholických nápojů před jízdou.

Policejní hlídka vybere ze skupiny náhodně 5 cyklistů.

Jaká je pravděpodobnost, že mezi vybranými cyklisty **nebude** žádný z 10 provinilců?

A) 0,31, B) 0,40, C) 0,49, D) 0,58, E) jiná pravděpodobnost

Řešení.

Pravděpodobnost lze spočítat jako

$$p = \frac{\text{počet všech příznivých výsledků}}{\text{počet všech možných výsledků}}.$$

Počet všech možných výsledků je počet všech možných výběrů 5 osob z 10 osob, což je

$$\binom{50}{5} = \frac{50!}{5! \cdot (50-5)!} = \frac{50 \cdot 49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 2118760.$$

Počet všech příznivých výsledků je když hlídka vybírá 5 cyklistů pouze ze skupiny 40 cyklistů, kteří nepili, tj.

$$\binom{40}{5} = \frac{40!}{5! \cdot (40-5)!} = \frac{40 \cdot 39 \cdot 38 \cdot 37 \cdot 36}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 658008$$

Výsledek je

$$p = \frac{658008}{2118760} = 0,31, \text{ tedy (A).}$$

### 13.10 2017J\_20, kombinatorika, pravděpodobnost

Z 25 žáků jedné třídy domácí úkol 3 žáci nevypracovali, 6 žáků jej vypracovalo chybně a zbývající žáci jej vypracovali správně.

Učitel náhodně vybere dvojici žáků.

Jaká je pravděpodobnost, že oba vybraní žáci budou mít úkol vypracován správně?

A)  $\frac{2}{5}$ , B)  $\frac{2}{3}$ , C)  $\frac{16}{25}$ , D)  $\frac{57}{100}$ , E) jiná pravděpodobnost

Řešení.

Pravděpodobnost lze spočítat jako

$$p = \frac{\text{počet všech příznivých výsledků}}{\text{počet všech možných výsledků}}.$$

Počet všech možných výsledků je počet všech možných výběrů 2 osob z 25 osob, což je

$$\binom{25}{2} = \frac{25 \cdot 24}{1 \cdot 2} = 25 \cdot 12.$$

Úkol vypracovalo správně  $25 - 3 - 6 = 16$  žáků. Počet všech příznivých výsledků je když učitel vybere 2 žáky z těchto 16, tj.

$$\binom{16}{2} = \frac{16 \cdot 15}{1 \cdot 2} = 120.$$

Proto  $p = \frac{120}{25 \cdot 12} = \frac{10}{25} = \frac{2}{5}$ , tedy (A).

## 13.11 2021P\_11, losy, pravděpodobnost

V Kocourkově bylo vyrobeno 500 stíracích losů, z nichž 30 % obsahuje ve stíracím poli výhru. V prodeji je však pouze 80 % těchto vyrobených losů. Z losů, které nešly do prodeje, polovina obsahuje výhru.

### 11 Vypočtete,

11.1 kolik losů v prodeji neobsahuje výhru,

11.2 jaká je pravděpodobnost, že zakoupený los bude obsahovat výhru.

Řešení.

Z 500 losů 30% obsahuje výhru, tj.  $500 \cdot 30/100 = 150$  losů obsahuje výhru. V prodeji je 80% losů, z 500, tj. 400 losů. Do prodeje nešlo 100 losů a v úloze se říká, že polovina z nich (tj. 50) obsahuje výhru. Celkově je tak v prodeji 400 losů a z nich  $150 - 50 = 100$  obsahuje výhru.

11.1 Počet losů v prodeji je 400, z nich 100 obsahuje výhru a 300 losů neobsahuje výhru.

11.2 Pravděpodobnost, že zakoupený los obsahuje výhru je tak  $100/400 = 0,25$ , tj. 25%.

Odpověď je podle Cermatu:

11.1. 300 losů

11.2. 1/4

## 14 SLOVNÍ ÚLOHY

### 14.1 2014J\_14, práce

Petr dokáže udělat celou práci sám za 6 hodin. Martin dokáže udělat stejnou práci sám za 8 hodin.

Ve skutečnosti pracoval nejdříve Petr a potom ho vystřídal Martin. Celou práci tak zvládli za 6,5 hodiny.

(Žádný z chlapců neměnil své pracovní tempo a střídání chlapců proběhlo bez časové prodlevy.)

(CERMAT)

**max. 3 body**

**14 Vypočtete, jak dlouho pracoval Petr, než ho vystřídal Martin.**

**V záznamovém archu uveďte celý postup řešení.**

Řešení.

Otázka je, co označit jako proměnné, neznámé. A jak vlastně sčítat práci? Zkusíme práci označit P (za P si představíme si třeba 100 výrobků, nebo třeba 1000 pytlů mouky).

Nyní zapisujeme, co říká text o práci P:

Pak můžeme říci, že *Petr za hodinu udělá  $P/6$  práce*, protože celá práce by mu trvala 6 hodin. *Martin za hodinu udělá  $P/8$  práce*, protože celá práce by mu trvala 8 hodin.

Nyní označíme ještě jednu neznámou, a tou je počet hodin X, které pracoval Petr a potom pracoval Martin, a to  $6,5-X$  hodin, to říká úloha.

Ted' zapíšeme, kolik práce udělal Petr za X hodin a kolik práce udělal Martin za zbývajících 6,5-X hodin a dohromady udělali celou práci:

$$\begin{aligned}X \cdot \frac{P}{6} + (6,5 - X) \cdot \frac{P}{8} &= P, \\ \frac{4XP + 3(6,5 - X)P}{24} &= P \\ 4XP + 3(6,5 - X)P &= 24P \\ 4XP + 19,5P - 3XP &= 24P \\ XP &= 24P - 19,5P \\ XP &= 4,5P \\ X &= 4,5\end{aligned}$$

Tím je úloha vyřešena, protože otázka byla, kolik hodin pracoval Petr, než ho vystřídal Martin. Odpověď je 4,5 hodiny.

## 14.2 2014J\_20, procenta

### VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 20

Ve dvoukolové soutěži družstev „Český čtverák“ se řešilo celkem 80 úkolů. V prvním soutěžním kole se řešila čtvrtina z celkového počtu úkolů, ve druhém kole zbytek. Z úkolů prvního kola družstvo vyřešilo pouze jednu pětinu. Proto do druhého kola změnilo taktiku. V něm pak z každé trojice úkolů vyřešilo právě dva.

(CERMAT)

**2 body**

**20 Kolik procent všech soutěžních úkolů družstvo vyřešilo?**

- A) 55 %
- B) 57 %
- C) 59 %
- D) 61 %
- E) jiný počet

**Řešení.**

Zde se nabízí označit X počet úkolů, které družstvo vyřešilo v obou kolech dohromady. Procento pak bude  $X/80$ , protože bylo celkem 80 úkolů. V prvním kole se řešilo  $80/4=20$  úkolů, ve druhém zbytek, tj. 60 úkolů. Z 20 úkolů prvního kola družstvo vyřešilo jednu pětinu, tj. jen  $20/5=4$  úkoly. V druhém kole řešilo 60 úkolů a z každé trojice vyřešilo dva, tj. bylo tam 20 trojic, tak vyřešilo  $20 \cdot 2=40$  úkolů. Dohromady v prvním i druhém kole vyřešilo  $40+4=44$  úkolů, což je  $44/80 = 55 \%$  úkolů. Řešením je (A)

## 14.3 2014P\_17, cena

### VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 17

Obchodník koupil výrobky za jednotnou nákupní cenu. Doporučená prodejní cena jednoho výrobku je o 60 % vyšší než jeho nákupní cena. Za doporučenou prodejní cenu prodal obchodník  $\frac{4}{5}$  nakoupených výrobků, zbytek výrobků se mu prodat nepodařilo.

(CERMAT)

2 body

17 O kolik procent je částka získaná z prodeje výrobků vyšší než částka vynaložená na nákup všech výrobků?

- A) o 48 %
- B) o 28 %
- C) o 20 %
- D) obě částky jsou stejné
- E) o jiný rozdíl

Řešení.

V této úloze je dobré si udělat jasno tím, že si označíme dvě neznámé. Časem nám určitě jedna zmizí.

Jednotnou nákupní cenu označíme JNC.

Počet nakoupených výrobků označíme V.

Zapisujeme, co říká text: *Doporučená prodejní cena* je o 60% vyšší než nákupní cena, je to tedy 160 % JNC, tj.  $\frac{160}{100}JNC$ . Obchodník prodal  $\frac{4}{5}V$  za cenu  $\frac{160}{100}JNC$ , tj. za prodej získal  $\frac{4}{5}V \cdot \frac{160}{100}JNC$ . Neprodal  $\frac{1}{5}V$ . Za nákup vydal  $V \cdot JNC$ . Poměr částky z prodeje k částce za nákup je tedy

$$\frac{\frac{4}{5}V \cdot \frac{160}{100}JNC}{V \cdot JNC} = \frac{4}{5} \cdot \frac{160}{100} = \frac{640}{500} = 1,28$$

Poměr tedy říká, že rozdíl je 28%, tj. **(B)**.

## 14.4 2021P\_22, poměry

### VÝCHOZÍ TEXT A DIAGRAM K ÚLOZE 22

V prvním ročníku jsou tři třídy A, B, C.

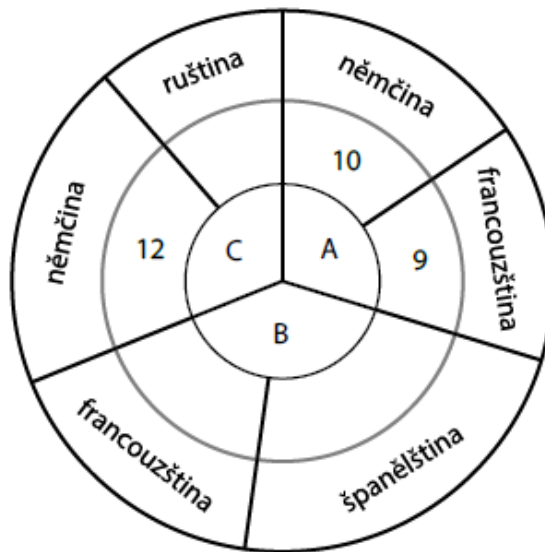
Do třídy B chodí 40 % všech žáků prvního ročníku.

Žáci každé třídy jsou rozděleni do 2 skupin podle výběru jazyka.

Ze třídy C chodí 60 % žáků na němčinu.

Některé další údaje jsou uvedeny v následujícím diagramu.

Počty žáků v jazykových skupinách



O kolik se liší počty žáků ve třídách B a C?

- A) o 2 žáky B) o 3 žáky C) o 4 žáky D) o 6 žáků E) o jiný počet žáků

Řešení.

Ponecháme označení pro počet žáků ve třídách A, B, C. Píšeme, co se říká v zadání. Do třídy B chodí 40% všech žáků, tj.

$$B = \frac{40}{100} (A + B + C)$$

Žáci každé třídy jsou rozděleni do 2 skupin podle jazyka. Ze třídy C chodí 60% žáků na němčinu. V diagramu je to 12 žáků, tj.

$$12 = \frac{60}{100} C, \text{ odtud } C = \frac{1200}{60} = 20$$

Další údaje z diagramu:

$$A = 10 + 9 = 19$$

Zbývá nám využití první rovnice, do které dosadíme  $C = 20$ ,  $A = 19$ :

$$B = \frac{40}{100} (19 + B + 20)$$

$$100B = 40 \cdot (39 + B)$$

$$60B = 40 \cdot 39$$

$$B = \frac{40 \cdot 39}{60} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 13}{6} = 26$$

Řešení je (D).

## 14.5 2023P\_10, jízda

Na 100 km jízdy spotřeboval automobil A 7 litrů benzínu a automobil B o  $x$  litrů benzínu méně než automobil A.

Cena benzínu byla 40 Kč za litr.

- 10.1 **Vypočtete** v Kč průměrné výdaje za benzin na 1 kilometr jízdy automobilu A. Výsledek nezaokrouhľujte.
- 10.2 **V závislosti na  $x$  vyjádřete** v Kč průměrné výdaje za benzin na 1 kilometr jízdy automobilu B.

Řešení.

Neznámou  $x$  označili přímo v textu. Píšeme údaje z textu:

A spotřeboval na 100 km .... 7 litrů benzínu

B spotřeboval na 100 km ....  $7-x$  litrů benzínu

Jeden litr benzínu stál 40 Kč.

Automobil A spotřebuje na 100 km 7 litrů benzínu, což stojí  $7 \cdot 40$  Kč = 280 Kč. Na 1 kilometr tak spotřebuje  $280/100$  Kč =  $2,8$  Kč.

Automobil B spotřebuje na 100 km  $(7 - x)$  litrů benzínu, což stojí  $(7 - x) \cdot 40$  Kč =  $280 - 40x$  Kč. Na 1 kilometr tak spotřebuje  $(280 - 40x) / 100$  Kč =  $2,8 - 0,4x$  Kč.

## 14.6 2025P\_01, jízda

### VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 1

Autobus páteřní linky odjíždí z výchozí zastávky ve 13:00 a dále pak během celé odpolední špičky, tj. od 13:00 do 18:00, vždy každých 5 minut.

Bezprostředně za uvedenou zastávkou se nachází světelná křižovatka, na které se během celé odpolední špičky rozsvěcí červená pro směr jízdy od zastávky v celou hodinu a poté každé 3 minuty. Červená svítí na semaforu vždy nejvýše půl minuty.

(CZVV)

1 bod

- 1 **Vypočtete, kolik autobusů páteřní linky odjíždějících z výchozí zastávky projede během odpolední špičky křižovatkou, aniž by musely zastavit na červenou.**

Řešení.

Tuto úlohu je nejefektivnější v první fázi přeskočit, protože má složité zadání.

V druhé fázi je možné ji řešit, ale je nutné si situaci zakreslit. Pokud nemáte jistotu, někdy je vhodné si vypsát i delší seznam, aby bylo všechno jasné.

Takže si zapíšeme, co se v úloze říká. Především autobus vyjíždí v tyto časy:

13:00

13:05

13:10

atd

13:55

---

14:00

14:05

atd

14:55

---

atd

atd

---

17:00

17:05

atd

17:55

---

18:00

Celkem je to 5 hodin, v každou hodinu vyjede 12 krát. Chyták je poslední autobus v 18:00, který není započítán do žádné hodiny, celkem tedy vyjede  $5 \cdot 12 + 1 = 61$  krát.

Teď musíme zjistit, v které časy svítí červená a jestli se to kryje s některými časy, kdy autobus vyjíždí.

Červená svítí každé tři minuty 30 vteřin, takže svítí

od - do

13:00:00 - 13:00:30

13:03:00 - 13:03:30

13:06:00 - 13:06:30

13:09:00 - 13:09:30

13:12:00 - 13:12:30

13:15:00 - 13:15:30

13:18:00 - 13:18:30

13:21:00 - 13:21:30

13:24:00 - 13:24:30

13:27:00 - 13:27:30

13:30:00 - 13:30:30

13:33:00 - 13:33:30

13:36:00 - 13:36:30

13:39:00 - 13:39:30

13:42:00 - 13:42:30

13:45:00 - 13:45:30

13:48:00 - 13:48:30

13:51:00 - 13:51:30

13:54:00 - 13:54:30

13:57:00 - 13:57:30

14:00:00 - 14:00:30

atd

14:57:00 - 14:57:30

atd

17:00:00 - 17:00:30

atd

17:57:00 - 17:57:30

18:00:00 - 18:00:30

První autobus, který musí zastavit, je ten, co vyjíždí ve 13:00. Jak vidíme ze schématu, během hodiny, v době 13:00-13:59:59 autobus zastaví 4x. Takto to probíhá 5 hodin a chyták je opět u posledního autobusu v 18:00, který také musí zastavit, ale není započítán v žádné hodině.

Proto autobus zastaví celkem  $4 \cdot 5 + 1 = 21$  krát.

Z celkového počtu 61 autobusů musí zastavit 21 autobusů, čili **40 autobusů nezastaví**.

## 14.7 2013\_soubor-vzorovych-uloh, úloha 16, trasa, jízda

Martin byl s cestovní agenturou na několikadenním prázdninovém putování na kolech. Za rok si úplně stejnou cestu zopakoval soukromě s Terezkou.

Cestování si však rozvrhli jinak než s agenturou. Pro každý den si naplánovali stejně dlouhý úsek, a to v průměru o desetinu kratší, než byla průměrná denní trasa s agenturou. Proto jejich cyklistické putování trvalo o dva dny déle než s agenturou.

(CERMAT)

16 Kolik dní trvalo cyklistické putování s cestovní agenturou?

- A) 14
- B) 16
- C) 18
- D) 20
- E) jiný počet dní

Řešení.

Především je důležitá délka trasy, kterou označíme  $L$ .

Pak si označíme  $D$  počet dní, které trvaly Martinovi v první cestě s agenturou.

Nyní zapíšeme, co se říká v zadání:

Průměrná denní trasa v první cestě s agenturou byla  $\frac{L}{D}$ .

Průměrná denní trasa v druhé cestě byla o desetinu kratší než v první cestě, čili byla 90% původní trasy, což je  $\frac{90}{100} \frac{L}{D}$ .

Cyklistické putování jim proto trvalo  $\frac{L}{\frac{90}{100} \frac{L}{D}}$  dní, což je o dva dny déle, než první cestování, tj.

$$\frac{L}{\frac{90}{100} \frac{L}{D}} = D + 2$$

Upravíme na

$$\begin{aligned} \frac{100D}{90} &= D + 2 \\ 100D &= 90D + 180 \\ D &= 18, \end{aligned}$$

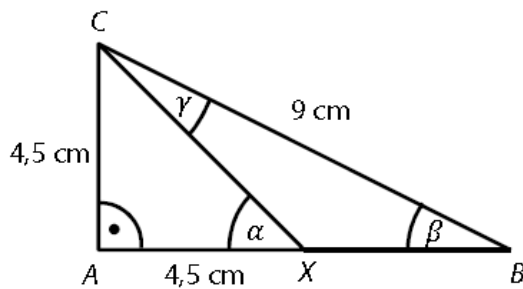
takže řešením je (C).

# 15 PLANIMETRIE: N-ÚHELNÍKY

## 15.1 2014P\_26

### VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 26

Přepona  $BC$  pravouhlého trojúhelníku  $ABC$  měří 9 cm, odvěsna  $AC$  měří 4,5 cm. Druhá odvěsna  $AB$  je bodem  $X$  rozdělena na dva úseky. Úsek  $AX$  má délku 4,5 cm.



(CERMAT)

max. 3 body

26 Přiřaďte ke každému úhlu (26.1–26.3) jeho velikost (A–E).

26.1  $\alpha$  \_\_\_\_\_

26.2  $\beta$  \_\_\_\_\_

26.3  $\gamma$  \_\_\_\_\_

- A)  $15^\circ$
- B)  $25^\circ$
- C)  $35^\circ$
- D)  $45^\circ$
- E) jiná velikost

Řešení.

Mají se určit úhly  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ .

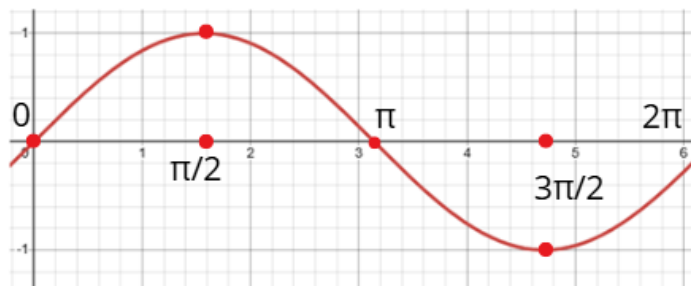
Řešení. Úhel  $\alpha$  určíme snadno, protože je to základní trojúhelník číslo 2, odvěsny  $\triangle AXC$  jsou stejné, takže  $\alpha = 45^\circ$ . Zároveň můžeme vypočítat  $CX$  jako přeponu tohoto  $\triangle$ , dokonce z paměti jako  $4,5 \cdot \sqrt{2}$  cm, neboť je to základní  $\triangle$  číslo 2, jenom o straně 4,5 krát větší. Teď v tom druhém trojúhelníku  $\triangle BXC$  známe dvě strany a jeden úhel, je to úhel u vrcholu X, který je  $180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$ . Dvě strany a jeden úhel, to je sinová věta!

$$\frac{9 \text{ cm}}{\sin 135^\circ} = \frac{CX}{\sin \beta}$$

Protože  $CX$  známe, můžeme vypočítat

$$\sin \beta = \frac{\sin 135^\circ}{9 \text{ cm}} \cdot CX = \frac{\sin 135^\circ}{9 \text{ cm}} \cdot 4,5 \cdot \sqrt{2} \text{ cm} =$$

Nyní bez kalkulačky jen ze základního trojúhelníku a grafu funkce sinus určíme  $\sin 135^\circ$  podle obrázku ([VK]):



Ze základního trojúhelníku číslo 2 určíme  $\sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}$  a současně ze symetrie v grafu vidíme, že  $\sin 135^\circ$  je stejné jako  $\sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}$ . Dosadíme do vzorce

$$\sin \beta = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{9 \text{ cm}} \cdot 4,5 \cdot \sqrt{2} \text{ cm} = \frac{1}{2}$$

a odtud opět bez tabulek ze základního  $\Delta$  číslo 1 určíme  $\beta = 30^\circ$ . Úhel  $\gamma$  je nyní jediný neznámý v  $\Delta BXC$ , takže ho dopočteme  $\gamma = 180^\circ - (135^\circ + 30^\circ) = 15^\circ$ .

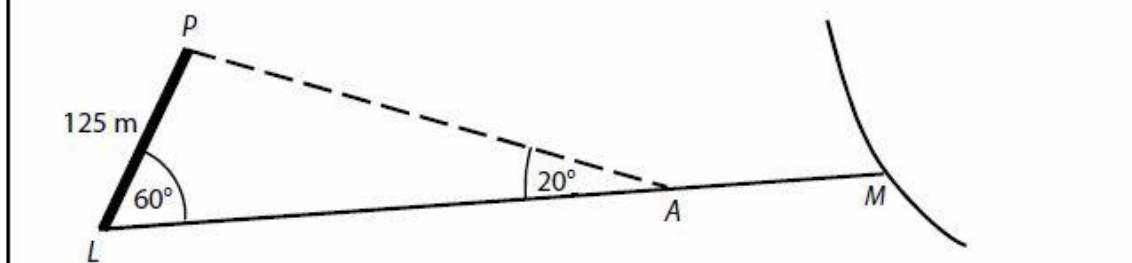
Úlohu jsme zvládli pouze se znalostí dvou základních  $\Delta$  a funkce sinus, bez kalkulačky, bez tabulek. Odpovědi jsou **DEA**.

## 15.2 2015P\_20

### VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 20

Hranice  $LP$  mezi dvěma pozemky má délku 125 metrů. Od jejího levého okraje  $L$  vede rovná pěšina  $LM$ , která s touto hranicí svírá úhel o velikosti  $60^\circ$ .

Na pěšině je stanoviště  $A$ , z něhož je hranice  $LP$  vidět pod zorným úhlem  $20^\circ$ .



(CZVV)

2 body

20 Jaká je vzdálenost  $AL$  stanoviště  $A$  od levého okraje  $L$  hranice  $LP$ ?

Výsledek je zaokrouhlen na celé metry.

- A) 250 m
- B) 343 m
- C) 360 m
- D) 365 m
- E) jiná vzdálenost

Řešení.

Řešení trochu zkrátíme. Je zde zobrazen trojúhelník, v němž je znám úhel  $20^\circ$  proti straně o délce 125 m a chce se vypočítat délka strany AL proti úhlu  $100^\circ$ . Řešení je opět pomocí sinové věty:

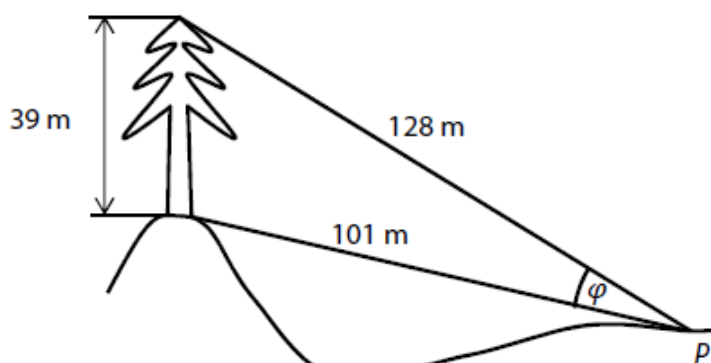
$$\frac{AL}{\sin 100^\circ} = \frac{125 \text{ m}}{\sin 20^\circ},$$

odkud  $AL = 360 \text{ m}$ . Řešení je (C).

### 15.3 2016J\_17

#### VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 17

Svisle rostoucí strom je vysoký 39 m. Místo pozorování P je od paty kmene stromu vzdáleno 101 m a od vrcholu stromu 128 m. Z místa pozorování P se strom od paty kmene po jeho vrchol jeví v zorném úhlu  $\varphi$ .



(CZVV)

2 body

17 Jaká je velikost zorného úhlu  $\varphi$ ?

(Výsledek je zaokrouhlen na celé stupně, tloušťku stromu zanedbáváme.)

- A)  $14^\circ$
- B)  $18^\circ$
- C)  $21^\circ$
- D)  $23^\circ$
- E)  $38^\circ$

Řešení.

Řešení trochu zkrátíme. Je zde zobrazen strom jako jedna strana trojúhelníku, v němž jsou známy všechny tři strany. Má se vypočítat úhel, pod kterým vidíme strom, tj. úhel proti jedné ze stran.

Řešení je typické pro kosinovou větu  $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos(\gamma)$ . Známe zde všechny tři strany a, b, c a jedinou neznámou je úhel  $\gamma$ . Z rovnice vypočteme  $\cos(\gamma)$  a odtud úhel  $\gamma$ .

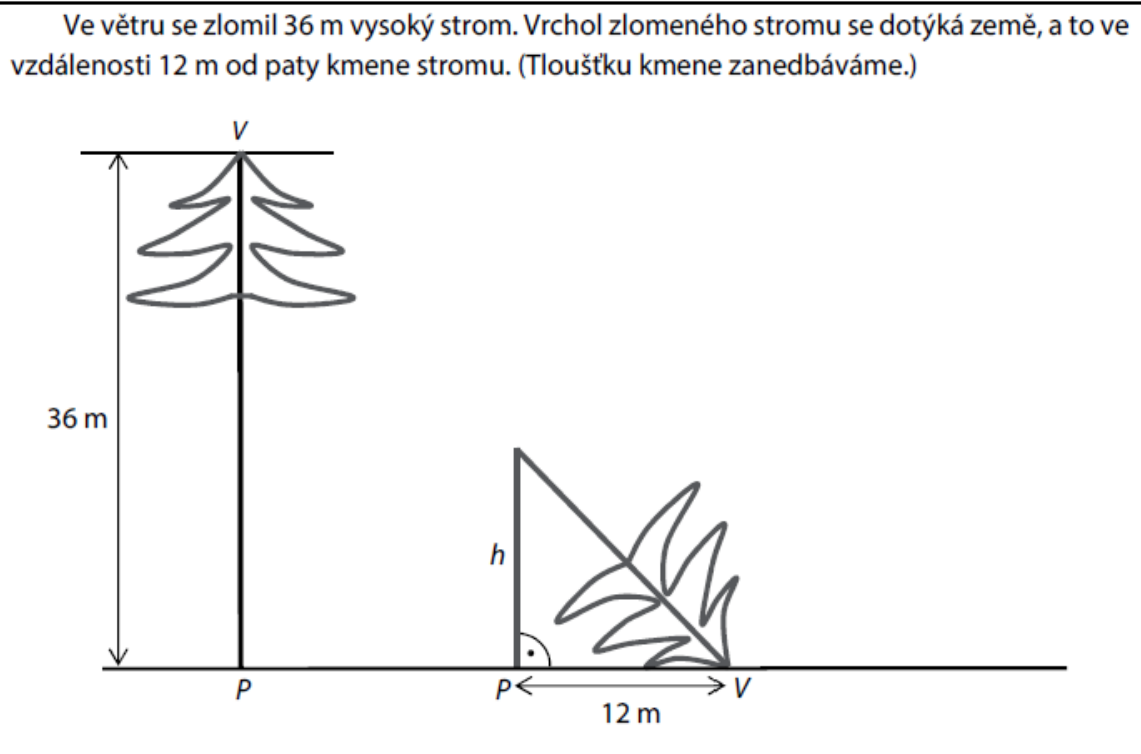
Zajímalo nás, jestli budeme muset použít kalkulačku. Dosadíme  $\cos(\gamma) = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} =$

$\frac{128^2 + 101^2 - 39^2}{2 \cdot 128 \cdot 101} = 0,9693$ , a na kalkulačce  $\gamma = 14,21^\circ$ . Tentokrát i násobení i funkce arccos

(dělá se jako SHIFT COS 0,9693) musely být dělány na kalkulačce. Řešením je (A).

## 15.4 2017J\_14

### VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 14



(CZVV)

max. 2 body

**14** Vypočtete, v jaké výšce nad zemí ( $h$ ) se strom zlomil.

V záznamovém archu uveďte celý postup řešení.

Řešení.

Řešení trochu zkrátíme. Je zde zobrazen strom o délce 36m, který se zlomí ve výšce  $h$  metrů a jeho vrchol padne 12m od paty stromu, viz obr.

Má se určit výška  $h$ .

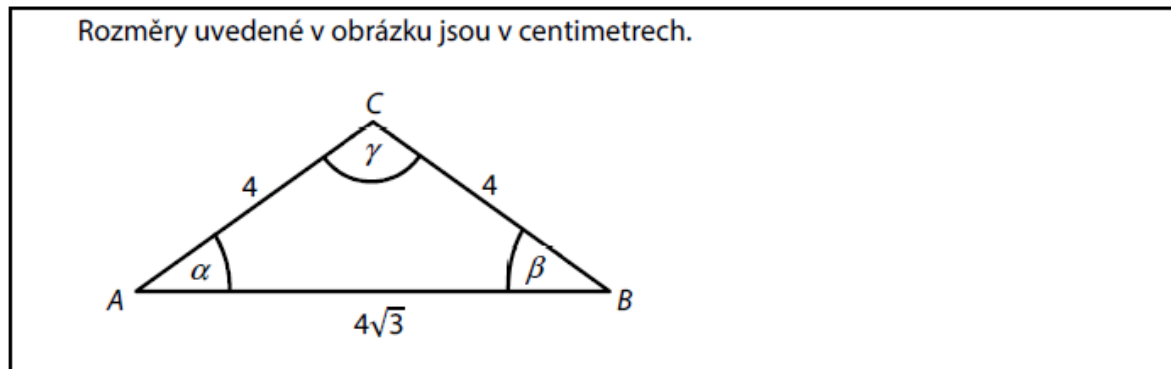
Vidíme zde pravoúhlý trojúhelník, jehož jedna odvěsna má délku 12, druhá odvěsna délku  $h$  a přepona  $36 - h$ . Sestavíme rovnici:

$$12^2 + h^2 = (36 - h)^2$$

a odtud vypočteme  $h = 16m$ .

## 15.5 2017P\_14

### VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 14



(CZVV)

max. 2 body

**14 V trojúhelníku  $ABC$  vypočítejte bez zaokrouhlování:**

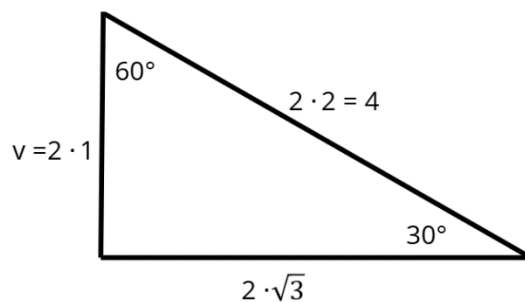
- 14.1 velikost vnitřního úhlu  $\gamma$ ;
- 14.2 výšku  $v_c$  na stranu  $AB$  v centimetrech.

**V záznamovém archu uveďte celý postup řešení obou částí úlohy.**

Řešení.

Řešení trochu zkrátíme. Tento příklad je přímo vytvořen pro použití základního  $\Delta$  číslo 1.

V tomto  $\Delta$  máme určit úhel  $\gamma$  a výšku  $v$  na stranu  $AB$ . Vidíme, že se jedná o rovnoramenný  $\Delta$ , který tudíž výška  $v$  dělí na dva stejné pravoúhlé trojúhelníky, viz obr.:



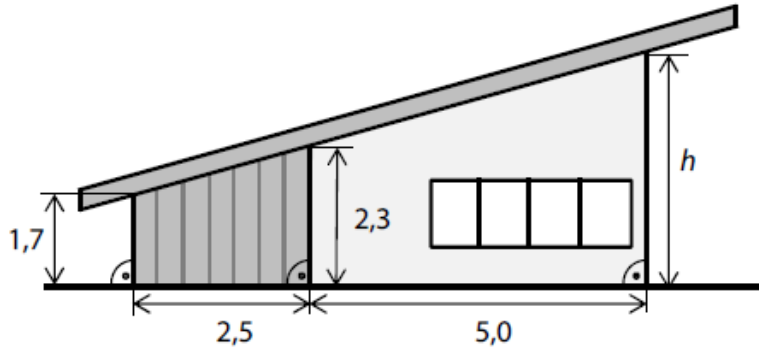
Uvedený trojúhelník je základní  $\Delta$  číslo 1, jen každá strana je násobena dvojkou. Proto můžeme ihned určit výšku  $v = 2 \cdot 1 = 2$  a úhel  $\gamma = 2 \cdot 60^\circ = 120^\circ$ .

Můžeme to dělat i pomocí Pythagorovy věty, kdy máme pravoúhlý  $\Delta$ , který má jednu odvěsnu  $v$ , druhou odvěsnu  $2\sqrt{3}$  a přeponu 4, takže  $v^2 + (2\sqrt{3})^2 = 4^2$ , tj.  $v = 2$  cm.

## 15.6 2018P\_18

### VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 18

Střecha chalupy překrývá obytnou část a kůlnu. Nejvyšší stěna chalupy má výšku  $h$ . Rozměry uvedené v náčrtku jsou v metrech.



(CZVV)

2 body

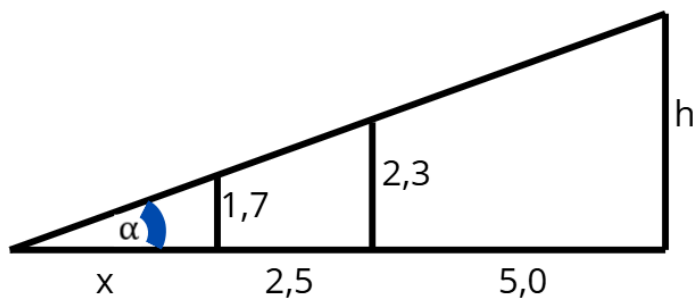
**18** Jaká je výška  $h$  nejvyšší stěny chalupy?

- A) menší než 3,5 m
- B) 3,5 m
- C) 3,6 m
- D) 3,7 m
- E) větší než 3,7 m

Řešení.

Jedná se asi o nejtěžší příklad z planimetrie.

Řešení je tentokrát s využitím podobnosti trojúhelníků. Musíme si dokreslit střechu doleva až na zem, protože ta vytváří jeden jediný stejný úhel  $\alpha$  ve všech dílčích trojúhelnících, které mají danou nějakou výšku a část strany ([VK]):



Tyto trojúhelníky jsou podobné, proto platí

$$\operatorname{tg}(\alpha) = \frac{h}{x + 2,5 + 5,0} = \frac{2,3}{x + 2,5} = \frac{1,7}{x}.$$

Úhel  $\alpha$  nás tolik nezajímá, jako dvě neznámé  $x$ ,  $h$  ve výše uvedených dvou rovnicích, které vplynuly z podobnosti trojúhelníků:

$$\frac{2,3}{x + 2,5} = \frac{1,7}{x}$$

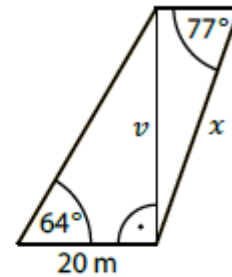
$$\frac{h}{x + 2,5 + 5,0} = \frac{1,7}{x}$$

Z první rovnice vypočteme  $x = \frac{85}{12}$ , a z druhé rovnice  $h = \frac{1,7 \cdot (x + 2,5 + 5,0)}{x} = 3,5$  m, tedy řešením je (B)

## 15.7 2025P\_21

### VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 21

Na obrázku je zahrada tvaru lichoběžníku, jehož delší základna měří 20 m, dva jeho vnitřní úhly jsou ostré a mají velikosti  $64^\circ$  a  $77^\circ$ .



(CZW)

2 body

21 Která z následujících rovností vyjadřuje délku ramene  $x$  v metrech?

- A)  $x = 20 \cdot \frac{\operatorname{tg} 64^\circ}{\cos 77^\circ}$
- B)  $x = 20 \cdot \frac{\operatorname{tg} 64^\circ}{\sin 77^\circ}$
- C)  $x = 20 \cdot \frac{\cos 64^\circ}{\sin 77^\circ}$
- D)  $x = 20 \cdot \operatorname{tg} 64^\circ \cdot \cos 77^\circ$
- E)  $x = 20 \cdot \cos 64^\circ \cdot \sin 77^\circ$

Řešení. Jsou zde vidět dva pravoúhlé trojúhelníky. V levém je znám úhel  $64^\circ$ , druhý je  $90^\circ$ , a strana 20m. Pak můžeme pomocí tangens toho úhlu vypočítat poměr výšky  $v$  ku straně 20m:

$$\operatorname{tg}(64^\circ) = \frac{v}{20}, \quad \text{čili} \quad v = 20 \cdot \operatorname{tg}(64^\circ)$$

V druhé trojúhelníku můžeme ze stran  $v$  a  $x$  vypočítat sinus úhlu  $77^\circ$ , takže máme

$$\sin(77^\circ) = \frac{v}{x}, \quad \text{čili} \quad x = \frac{v}{\sin(77^\circ)}$$

Do poslední rovnice pro  $x$  dosadíme za  $v$  z první rovnice:

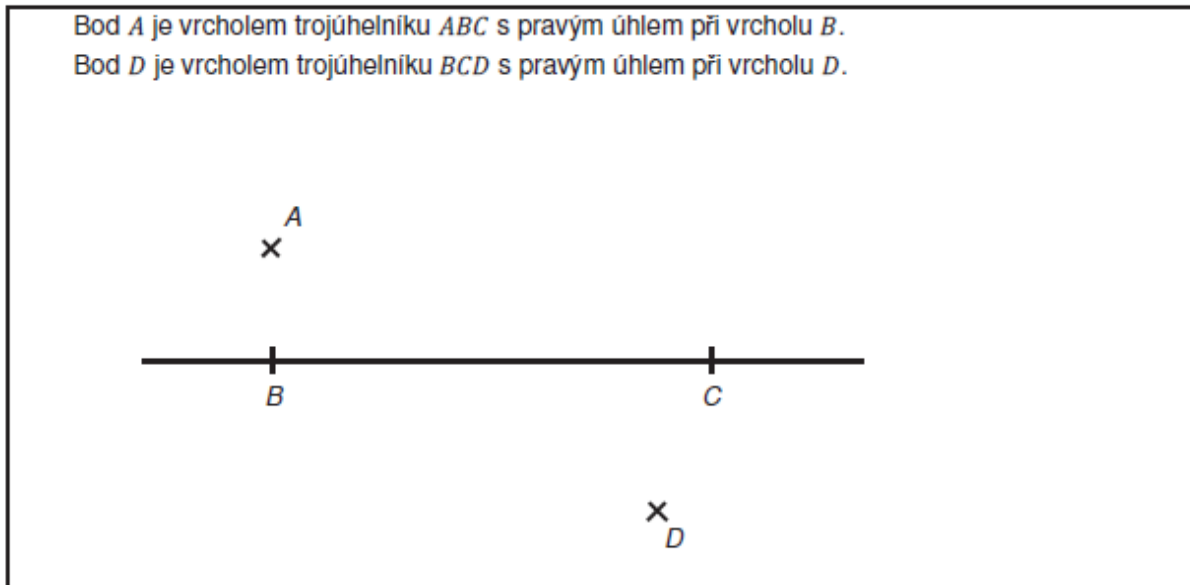
$$x = \frac{v}{\sin(77^\circ)} = \frac{20 \cdot \operatorname{tg}(64^\circ)}{\sin(77^\circ)}$$

a výsledek odpovídá (B).

## 15.8 2015\_ilustracni\_test, úloha 4

### VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 4

Bod  $A$  je vrcholem trojúhelníku  $ABC$  s pravým úhlem při vrcholu  $B$ .  
 Bod  $D$  je vrcholem trojúhelníku  $BCD$  s pravým úhlem při vrcholu  $D$ .



(CERMAT)

max. 2 body

4

- 4.1 V polorovině  $BCA$  sestrojte množinu  $\mathcal{A}$  všech bodů  $A^*$ , které jsou vrcholy trojúhelníků  $A^*BC$  s pravým úhlem při vrcholu  $B$ .
- 4.2 V polorovině  $BCD$  sestrojte množinu  $\mathcal{D}$  všech bodů  $D^*$ , které jsou vrcholy trojúhelníků  $BCD^*$  s pravým úhlem při vrcholu  $D^*$ .

Nalezené množiny označte symboly  $\mathcal{A}$  a  $\mathcal{D}$ .

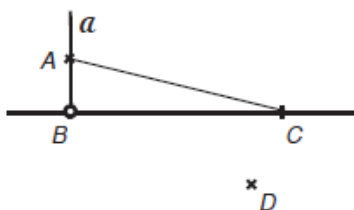
Řešení.

Úloha 4.1. je zřejmá, pravý úhel má být u bodu  $B$ , tak se tam vztyčí kolmice. Velký pozor na bod  $B$ , který do té „množiny bodů  $A^*$ “ nepatří (protože by to nebyl trojúhelník)!!!

Úloha 4.2. je dělána na Thaletovu větu, protože body  $D$  s pravým úhlem nad úsečkou  $BC$  tvoří Thaletovu kružnici, a pozor, tady chtějí jen polovinu, opět bez krajních bodů!!!

Řešení:

- 4.1 Polopřímka  $BA$  bez počátečního bodu  $B$ :



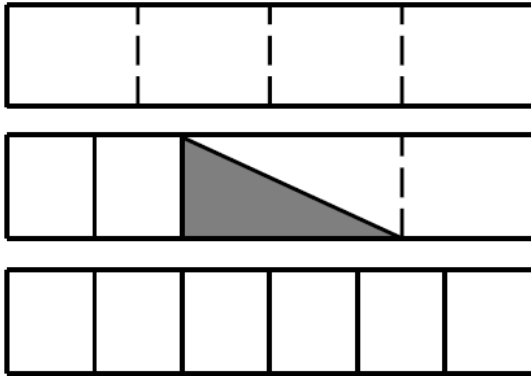
- 4.2 Půlkružnice  $BC$  bez krajních bodů  $B, C$ :



## 16 PLANIMETRIE: PLOCHY

### 16.1 2014J\_01, trojúhelník, obdélník

Tři shodné obdélníky jsou rozděleny různými způsoby. První obdélník je rozdělen na 4 shodné části, poslední obdélník na 6 shodných částí.



Vyjádřete zlomkem, jakou část druhého obdélníku tvoří tmavá plocha.

Řešení.

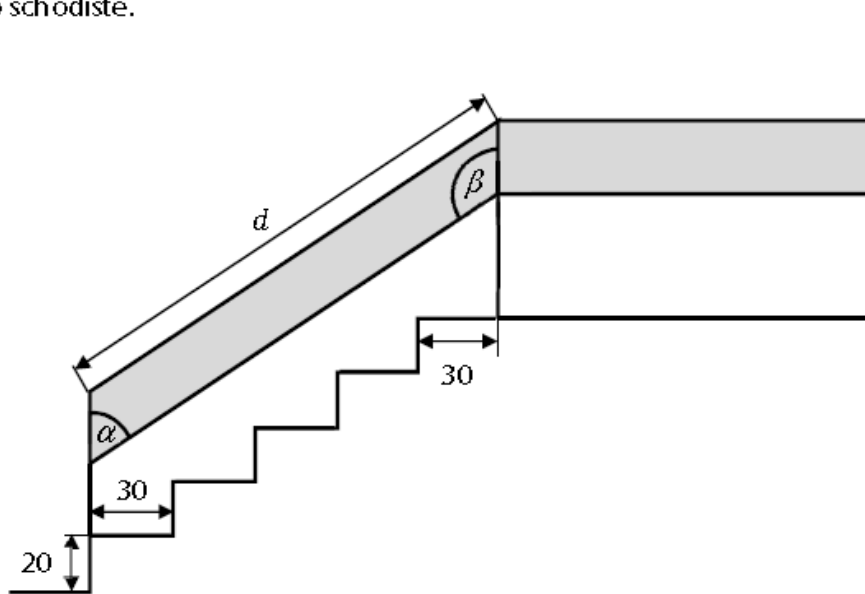
Vtip spočívá v tom všimnout si, že prostřední obdélník tvoří  $\frac{2}{6}$  plochy, protože jsou stejně velké jako šestiny třetího obdélníku, a dále poslední část je  $\frac{1}{4}$  plochy která je stejně velká jako čtvrtina prvního obdélníku. Z plochy obdélníku tak zbývá

$$1 - \frac{2}{6} - \frac{1}{4} = \frac{12 - 4 - 3}{12} = \frac{5}{12}.$$

Tato část je pak rozdělena napůl, takže tmavý trojúhelník má plochu  $\frac{5}{24}$ .

## 16.2 2014J\_09, rovnoběžník, trojúhelníky

Ke vchodu do rodinného domku vede schodiště s pěti schody, které jsou 20 cm vysoké a 30 cm široké. Šikmá část zábradlí tvaru rovnoběžníku s vnitřními úhly  $\alpha$  a  $\beta$  má stejný sklon jako schodiště.



Rozměry v obrázku jsou uvedeny v centimetrech.

- 9.1 Vypočítejte s přesností na stupně velikost úhlu  $\alpha$
- 9.2 Vypočítejte s přesností na cm délku  $d$  delší strany šikmé části zábradlí.

Řešení.

Vtip je v tom, že „zábradlí ... má stejný sklon jako schodiště“. Úhly jsou tedy stejné. Schody vytváří jeden malý pravoúhlý trojúhelník, který má vodorovnou základnu o délce 30 cm a výšku o délce 20 cm. Přepona tohoto trojúhelníku má tedy délku

$$c = \sqrt{20^2 + 30^2} = \sqrt{1300} = 10\sqrt{13}$$

Délka zábradlí vede přesně přes pět těchto schodů, takže

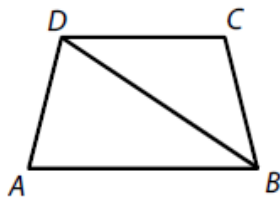
$$d = 50\sqrt{13} \doteq 180 \text{ cm.}$$

Úhel  $\alpha$  je přesně ten úhel, který je v malém pravoúhlém trojúhelníku proti protilehlé odvěsně o délce 30 cm a přilehlou odvěsnu má o délce 20 cm. Takže máme

$$\operatorname{tg}(\alpha) = \frac{30}{20} = 1,5 \text{ a odtud } \alpha \doteq 56^\circ$$

## 16.3 2017P\_18, lichoběžník, trojúhelníky, obsah

V lichoběžníku  $ABCD$  o obsahu  $32 \text{ cm}^2$  je výška  $v = 4 \text{ cm}$  a délka jedné základny  $6 \text{ cm}$ .



Lichoběžník je úhlopříčkou  $BD$  rozdělen na dva trojúhelníky  $ABD$  a  $BCD$ .

O kolik  $\text{cm}^2$  se liší obsahy trojúhelníků  $ABD$  a  $BCD$ ?

- A) O  $5 \text{ cm}^2$  B) o  $6,5 \text{ cm}^2$  C) o  $7 \text{ cm}^2$  D) o  $7,5 \text{ cm}^2$  E) o  $8 \text{ cm}^2$

Řešení.

U trojúhelníků je podstatná výška, tu mají oba stejnou  $v = 4$  cm. Základny mají  $AB = 6$  cm a neznámou délkou  $CD$ . Plocha lichoběžníku je definovaná jako

$$S = \frac{AB + CD}{2} \cdot v$$

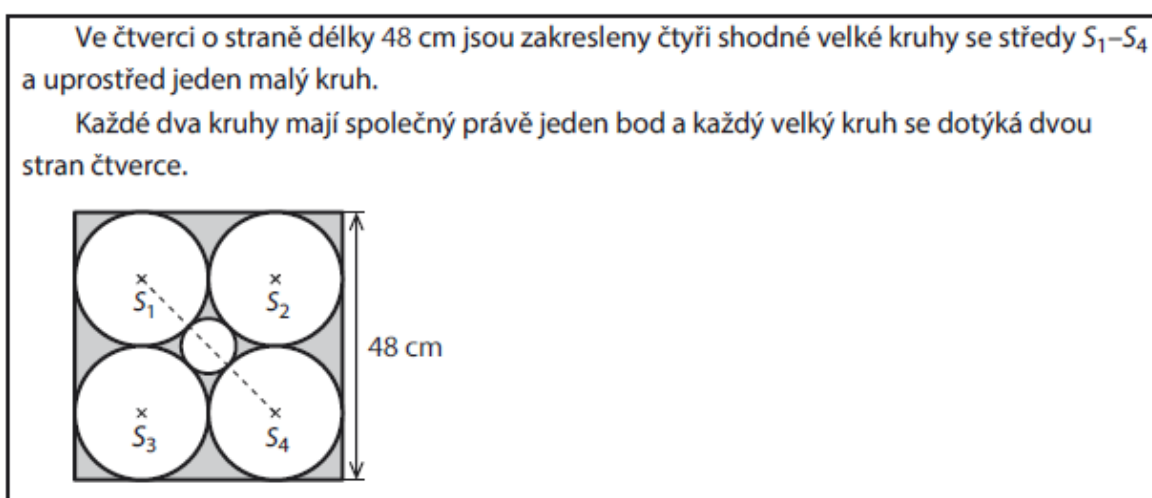
a po dosazení

$$32 = \frac{6 + CD}{2} \cdot 4$$

takže  $CD = 10$ . Obsahy trojúhelníků jsou  $10 \cdot 4 / 2 = 20$  cm<sup>2</sup> a  $6 \cdot 4 / 2 = 12$  cm<sup>2</sup>. Rozdíl je 8 cm<sup>2</sup>. Zároveň vidíme, že text nesouhlasí s obrázkem, kde  $CD$  je kratší než  $AB$ , ale výpočet ukázal opak. Nicméně na výsledku to nic nemění. Řešení je (E).

## 16.4 2019P\_08 a 09, kruhy, plocha

### VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOHÁM 8-9



Úloha 8: Vypočítejte v cm vzdálenost středů  $S_1$ ,  $S_4$ . Výsledek zaokrouhlete na celé cm.

Úloha 9: Vypočítejte v cm obvod malého kruhu. Výsledek zaokrouhlete na celé cm.

Řešení.

Nejprve si uvědomíme, že strana čtverce 48 cm jsou de facto čtyři poloměry větších kruhů. Poloměr kruhu je tedy 12 cm. Když se podíváme na vzdálenost středů  $S_1$ ,  $S_4$ , tak vidíme že to je úhlopříčka pravoúhlého trojúhelníku  $S_1S_2S_4$ . Strana tohoto trojúhelníku je rovna dvěma poloměrům, tedy je 24 cm. Úhlopříčka je  $S_1S_4 = 24\sqrt{2} = 33,94$ . Na této úhlopříčce leží dva poloměry velkého kruhu a průměr malého kruhu, proto průměr malého kruhu je

$$d = 24\sqrt{2} - 2 \cdot 12 = 24(\sqrt{2} - 1)$$

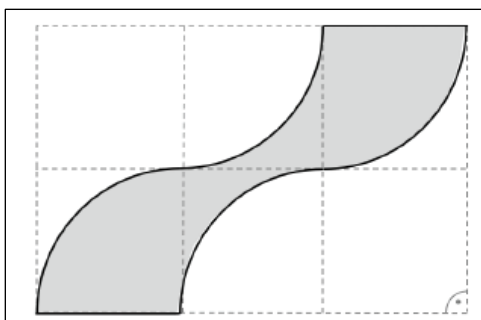
A jeho obvod je

$$o = \pi \cdot 24(\sqrt{2} - 1) = 31,23 \text{ cm.}$$

Řešení je tedy  $S_1S_4 = 34$  cm,  $o = 31$  cm.

## 16.5 2024J\_10, N-úhelník, plocha

Šedý obrazec je ohraničen 4 čtvrtkružnicemi o poloměru 5 cm a stranami dvou čtverců.



10.1 Vypočítejte obsah šedého obrazce v  $\text{cm}^2$ .

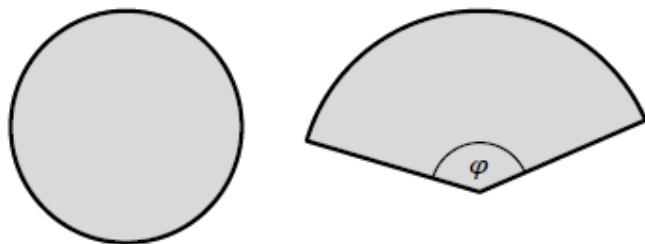
10.2. Vypočítejte obvod šedého obrazce v cm. Zaokrouhlete výsledek na desetiny cm.

Řešení.

Tady řešení spočívá jen v tom, že se zkombinují obrazce. Strana čtverce je 5 cm a je to zároveň poloměr kružnice. Když se podíváme na šedý obrazec, můžeme jednotlivé plochy spojit a získáme dva celé čtverce, tj. 2 krát  $25 \text{ cm}^2$ , což je  **$50 \text{ cm}^2$** . Obvod šedého obrazce zase tvoří 4 čtvrtkužnice a dvě strany po 5 cm, dohromady  $o = 2 \cdot 5 \text{ cm} + 2\pi \cdot 5 \text{ cm} = \mathbf{41,4 \text{ cm}}$ .

## 16.6 2025J\_19, kruhová výseč, plocha

Kruh s poloměrem  $r$  má stejný obsah jako kruhová výseč se středovým úhlem  $\varphi$  a poloměrem  $\frac{3}{2}r$ .



Jakou velikost má úhel  $\varphi$ ?

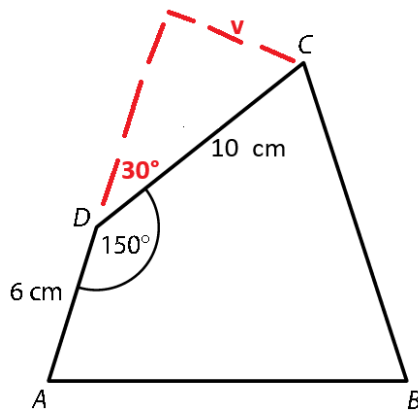
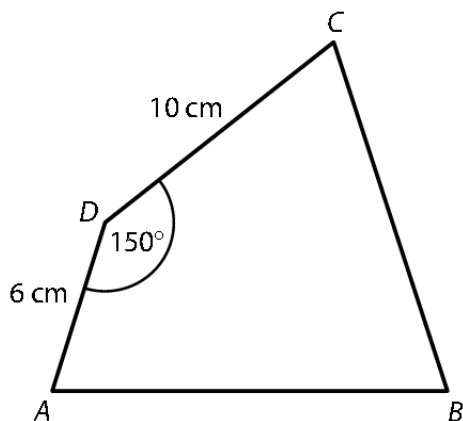
- A)  $120^\circ$  B)  $160^\circ$  C)  $200^\circ$  D)  $240^\circ$  E) jinou velikost

Řešení.

K řešení je nutné znát vzoreček, který říká, že pokud z kruhu vysekneme jen úhel  $\varphi$  místo  $360^\circ$ , tak plocha té výseče je přesně v poměru  $\varphi/360$  vůči ploše kruhu. Plocha výseče je proto  $\frac{\varphi}{360} \cdot \pi \cdot \left(\frac{3}{2}r\right)^2 = \frac{\varphi}{360} \cdot \pi \cdot \frac{9}{4}r^2$ . Přičemž tento obsah je stejný jako obsah kruhu nalevo, což je  $\pi \cdot r^2$ . Takže máme rovnici  $\pi \cdot r^2 = \frac{\varphi}{360} \cdot \pi \cdot \frac{9}{4}r^2$ , z čehož vyplyne  $\frac{4}{9} \cdot 360^\circ = \varphi$ ,  $\varphi = 160^\circ$ , řešení je **(B)**.

## 16.7 2021J\_17, trojúhelník, plocha

Ve čtyřúhelníku  $ABCD$  o obsahu  $70 \text{ cm}^2$  platí:  $|\sphericalangle ADC|=150^\circ$ ,  $|CD|=10 \text{ cm}$ ,  $|AD|=6 \text{ cm}$ .



Obr.: [CZVV] a [VK]

Jaký je obsah trojúhelníku ABC?

- A) Menší než  $43 \text{ cm}^2$  B)  $44 \text{ cm}^2$  C)  $49 \text{ cm}^2$  D)  $55 \text{ cm}^2$  E) větší než  $56 \text{ cm}^2$

Řešení.

Kromě vyznačených hodnot je znám obsah čtyřúhelníku. Trojúhelník ADC je plně určený, takže můžeme vypočítat jeho plochu. Tu odečteme od plochy čtyřúhelníku a máme výsledek. Zbývá určit plochu trojúhelníku ADC. Nejsnazší cesta je určit výšku „ $v$ “ z vrcholu C na stranu AD.

Stačí si uvědomit, že

$$\sin(30^\circ) = \frac{v}{10},$$

protože úhel u vrcholu D je  $30^\circ$ . Ze základních pythagorejských trojúhelníků víme, že

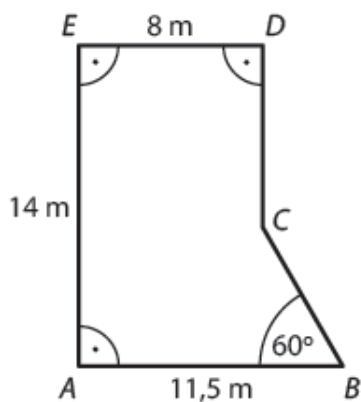
$$\sin(30^\circ) = \frac{1}{2},$$

takže  $\frac{v}{10} = \frac{1}{2}$ , tj.  $v = 5 \text{ cm}$ . Plocha ADC je  $6 \cdot 5 / 2 = 15 \text{ cm}^2$ , zbývá  $55 \text{ cm}^2$ , řešení je (D).

## 16.8 2023P\_13, N-úhelník, plocha

Stavba má tvar pětibokého kolmého hranolu s výškou 5 metrů.

Na obrázku je zakreslena podstava ABCDE tohoto hranolu.



### 13 Vypočtěte

13.1 v  $m^2$  obsah boční stěny hranolu, která obsahuje podstavnou hranu  $BC$ ,

13.2 v  $m^3$  objem hranolu.

Výsledky zaokrouhlete na celá čísla, dílčí výpočty nezaokrouhľujte.

V záznamovém archu uveďte v obou částech úlohy celý postup řešení.

Řešení.

Nejde ani tak o objem, jako plochu podstavy, protože výška je známa – 5 m. Totéž stěna hranolu je výška krát délka strany  $BC$ . Musíme tedy určit délku strany  $BC$  a plochu podstavy. Pokud protáhneme stranu  $DC$  až dolů, vznikne tam pravoúhlý trojúhelník právě s přeponou  $BC$ , úhlem  $60^\circ$  a k tomuto úhlu přilehlou odvěsnu o délce  $3,5 \text{ m} = 11,5 \text{ m} - 8 \text{ m}$ . Tím je definováno

$$\cos(60^\circ) = \frac{3,5}{BC}.$$

Ze základního pythagorejského trojúhelníku víme, že  $\cos(60^\circ) = \frac{1}{2}$ , takže

$$\frac{1}{2} = \frac{3,5}{BC}, \quad BC = 7$$

Plocha boční stěny je proto

$$S = BC \cdot 5 = 7 \cdot 5 = 35 \text{ m}^2.$$

Plocha trojúhelníku je základna krát výška lomeno 2, což je zde  $3,5 \text{ m}$  a výšku vypočteme z trojúhelníku jako

$$v = BC \cdot \sin(60^\circ) = 7 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 3,5 \cdot \sqrt{3} \text{ (m)}$$

a plocha trojúhelníku je

$$P\Delta = 3,5 \cdot 3,5 \cdot \sqrt{3} / 2 = 10,60 \text{ (m}^2\text{)}.$$

Plocha podstavy je ještě o obdélník o rozměrech  $14 \times 8 \text{ m}$  větší, tj.

$$P = 14 \cdot 8 + 10,60 = 122,60 \text{ (m}^2\text{)}.$$

A objem je

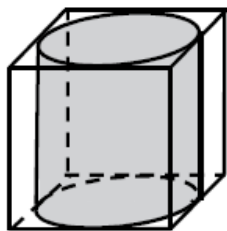
$$V = 122,60 \cdot 5 = 613 \text{ m}^3.$$

## 17 STEREOMETRIE

### 17.1 2015J\_21, válec

#### VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 21

Do krabice tvaru krychle je vložen válec o objemu  $570 \text{ cm}^3$ . Válec se dotýká všech stěn krabice.



Jaká je výška válce (zaokrouhlená na desetiny cm)?

- A) menší než  $8,4 \text{ cm}$    B)  $8,5 \text{ cm}$    C)  $8,7 \text{ cm}$    D)  $9,0 \text{ cm}$    E) větší než  $9,1 \text{ cm}$

Řešení.

Označíme stranu krychle „a“. Strana krychle je také průměr podstavy válce a také výška válce. Objem válce je

$$V = \pi r^2 v = \pi \left(\frac{a}{2}\right)^2 \cdot a = \pi \frac{a^3}{4}$$

Z rovnice  $\pi \frac{a^3}{4} = 570$  vypočteme  $a = \sqrt[3]{570 \cdot \frac{4}{\pi}} = 9,0 \text{ cm}$ . Řešení je (D).

## 17.2 2015J\_22, kužel

Papírová čepice má tvar rotačního kužele. Po straně je slepena lepicí páskou. (Okraje papíru jsou k sobě přiloženy a v místě lepení se nepřekrývají.)

Osovým řezem kužele je rovnostranný trojúhelník s délkou strany 16 cm.



Kolik  $\text{cm}^2$  papíru je použito na čepici?

- A)  $96\pi \text{ cm}^2$  B)  $128\pi \text{ cm}^2$  C)  $192\pi \text{ cm}^2$  D)  $256\pi \text{ cm}^2$  E) jiný počet

Řešení.

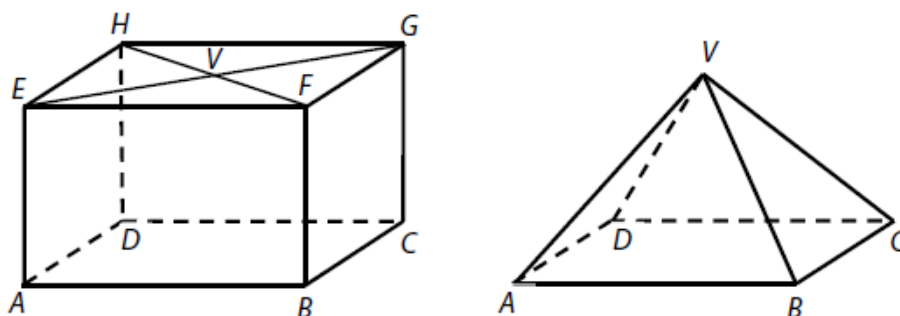
K výpočtu plochy pláště kužele (bez podstavy) potřebujeme jen dosadit do vzorce

$S = \pi r s$ , kde  $r$  je poloměr podstavy a  $s$  je hrana kužele. Ze zadání plyne  $r = 8 \text{ cm}$ ,  $s = 16 \text{ cm}$ , tj.  $S = \pi \cdot 8 \cdot 16 = 128\pi \text{ cm}^2$ . Řešení je (B).

## 17.3 2016J\_10 a 11, jehlan

### VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOHÁM 10–11

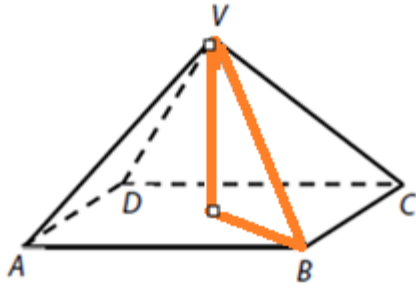
Z kváдру  $ABCDEFGH$  se vyřízne jehlan  $ABCDV$ . Vrchol  $V$  je středem stěny  $EFGH$ .



10 Určete, kolikrát je objem kváдру větší než objem jehlanu.

11 Platí:  $|BD| = 4\sqrt{7} \text{ cm}$ ,  $|BV| = 8 \text{ cm}$ .

Vypočtěte v cm výšku v jehlanu.



Obr.: [VK]

Řešení.

První otázka je triviální, protože objem jehlanu je  $1/3$  objemu kvádrů. Kvádr má tedy **3x** větší objem. Druhá otázka je klasická, a to, že když spustíme výšku z vrcholu V jehlanu dolů, dostaneme se do bodu S, což je uprostřed podstavy. Tím vznikne pravoúhlý trojúhelník, který má jednu odvěsnu (neznámou) výšku  $v$ , druhou odvěsnu  $2\sqrt{7}$  cm (to je polovina úhlopříčky

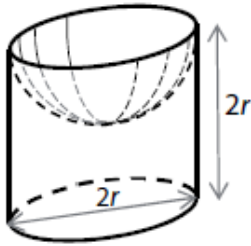
BD) a přeponu  $BV = 8$  cm. Z Pythagorovy věty vypočteme  $v = \sqrt{8^2 - (2\sqrt{7})^2} = \sqrt{64 - 28} =$

**6 cm.**

## 17.4 2016P\_21, válec a koule

V rovnostranném válci je vytvořena dutina tvaru polokoule.

Poloměr podstavy válce i poloměr polokoule je  $r = 10$  cm, výška válce je  $2r$ .



Jaký je povrch vytvořeného tělesa (tj. válce s dutinou)?

- A) větší než  $900 \pi \text{ cm}^2$
- B)  $900 \pi \text{ cm}^2$
- C)  $800 \pi \text{ cm}^2$
- D)  $700 \pi \text{ cm}^2$
- E) menší než  $700 \pi \text{ cm}^2$

Řešení.

Vypočteme objem válce a odečteme objem polokoule. Válec má poloměr podstavy  $r$  a výšku  $2r$ . Koule má poloměr  $r$ . Výsledný objem je tedy

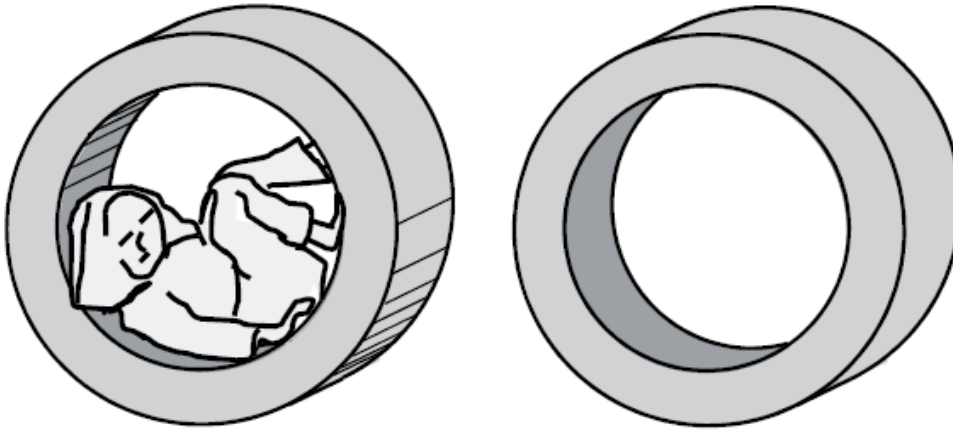
$$V = \pi r^2 \cdot 2r - \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \pi r^3 = \left(2 - \frac{2}{3}\right) \pi r^3 = \frac{4}{3} \pi r^3 = 1333\pi.$$

Jenže otázka zněla nikoli na objem, ale na povrch !!! To se stává dost často, že student si nepřečte zadání. Je to jedna z důležitých zásad. Takže znovu.

Povrch vytvořeného tělesa se skládá z podstavy válce, pláště válce a povrchu polokoule, tedy  $S = \pi r^2 + 2\pi r \cdot 2r + \frac{1}{2} \cdot 4\pi r^2 = (1 + 4 + 2)\pi r^2 = 700\pi$ . Řešení je (D).

## 17.5 2017J\_24, dutý válec

Cvičební pomůcka z šedé tvrzené pěny je rotační těleso, které lze popsat jako dutý válec. Dutý válec má výšku 70 cm, vnější průměr 180 cm a vnitřní průměr (tj. průměr dutiny) 120 cm.



Jaký je povrch tělesa (včetně plochy uvnitř dutiny)?

Výsledek je zaokrouhlen na desetiny m<sup>2</sup>.

- A) 4,1 m<sup>2</sup>
- B) 6,8 m<sup>2</sup>
- C) 7,2 m<sup>2</sup>
- D) 9,4 m<sup>2</sup>
- E) 11,6 m<sup>2</sup>

Řešení.

Plocha tělesa jsou dvě mezikruží, jeden plášť válce uvnitř a jeden plášť válce na vnější straně.

Plocha jednoho mezikruží vznikne odečtením malého kruhu od velkého a je to

$S = \pi \cdot (90^2 - 60^2) \text{ cm}^2$ . Plocha vnitřního pláště válce je  $S = 2\pi \cdot 60 \cdot 70 \text{ cm}^2$ . Plocha

vnějšího pláště válce je  $S = 2\pi \cdot 90 \cdot 70 \text{ cm}^2$ . Dohromady to je plocha

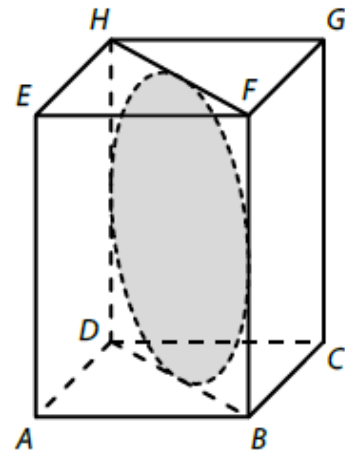
$S = 2 \cdot \pi \cdot (90^2 - 60^2) + 2\pi \cdot 60 \cdot 70 + 2\pi \cdot 90 \cdot 70 \text{ (cm}^2\text{)} = 2\pi \cdot (90 + 60)(90 - 60) +$

$2\pi \cdot 60 \cdot 70 + 2\pi \cdot 90 \cdot 70 = 2\pi \cdot 150 \cdot 30 + 2\pi \cdot 150 \cdot 70 = 2\pi \cdot 15000 \text{ cm}^2 = 9,4 \text{ m}^2$ .

Odpověď je tedy **(D)**.

## 17.6 2022J\_21, vepsaný kruh do hranolu

Úhlopříčnému řezu  $DBFH$  pravidelného čtyřbokého hranolu  $ABCDEFGH$  je vepsán kruh o průměru 8 cm.



**Jaký je objem hranolu  $ABCDEFGH$  ?**

- A) menší než  $256 \text{ cm}^3$  B)  $256 \text{ cm}^3$  C)  $384 \text{ cm}^3$  D)  $512 \text{ cm}^3$  E) větší než  $512 \text{ cm}^3$

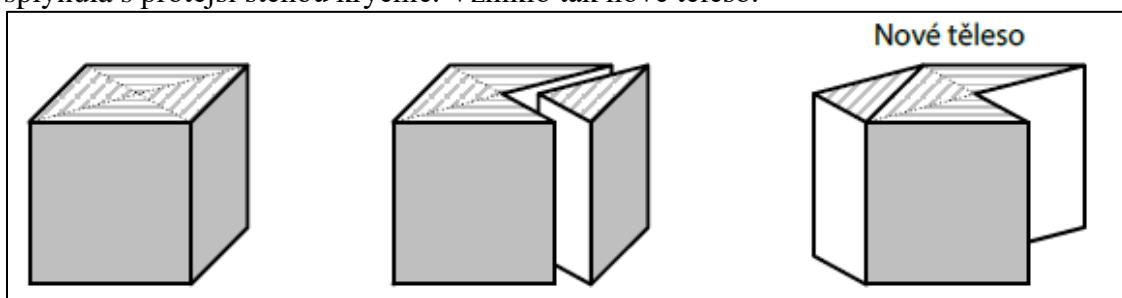
Řešení.

Všimněme si, že se jedná o "pravidelný čtyřboký hranol", takže podstava je čtverec. Označíme jeho stranu  $x$ . Potom můžeme vypočítat úhlopříčku  $DB$  podstavy a nakreslit si řez. Úhlopříčka podstavy je úhlopříčka čtverce o straně  $x$ , tj.  $x \cdot \sqrt{2}$ . Výška hranolu je 8 cm, protože je tam vepsán kruh o průměru 8 cm. V řezu  $DBFH$  je vepsán kruh, to znamená, že výška hranolu je stejná jako  $x \cdot \sqrt{2}$ , čili  $x \cdot \sqrt{2}$ , a to je podle zadání 8 cm. Z toho vypočítáme

$x = \frac{8}{\sqrt{2}} \text{ (cm)}$ . Objem hranolu je tak plocha podstavy krát výška, čili  $V = x^2 \cdot 8 = \left(\frac{8}{\sqrt{2}}\right)^2 \cdot 8 = \frac{512}{2} = 256 \text{ cm}^3$ . Řešením je **(B)**.

## 17.7 2023J\_20, hranoly

Z krychle s hranou délky 4 cm byl dvěma kúhlopříčnými svislými řezy oddělen trojboký hranol, který tvoří čtvrtinu krychle. Oddělený hranol se přemístil tak, aby jeho čtvercová stěna splynula s protější stěnou krychle. Vzniklo tak nové těleso.



**Jaký je povrch nového tělesa?**

- A)  $109 \text{ cm}^2$  B)  $128 \text{ cm}^2$  C)  $135 \text{ cm}^2$  D)  $155 \text{ cm}^2$  E) jiný povrch

Řešení.

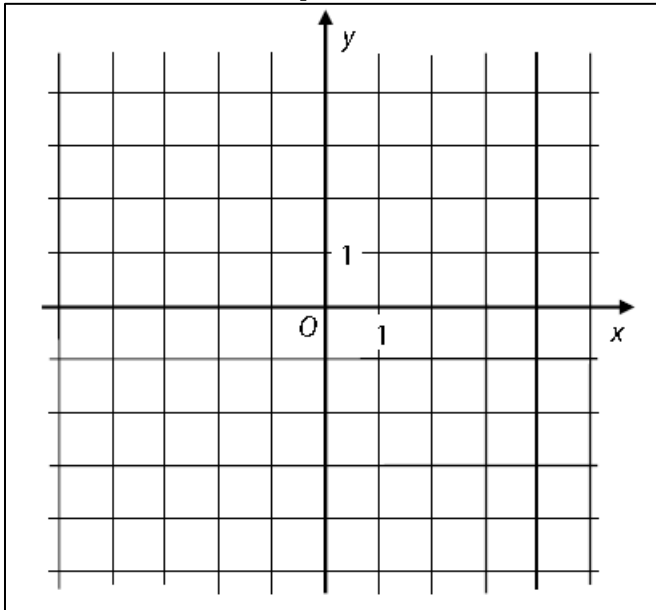
Opět je důležitá představivost, zde máme ale náčrtek, který nám pomůže povrch vypočítat. Jedná se o krychli se stranou  $a = 4 \text{ cm}$ . Všimněme si, že plocha dolní i horní podstavy se nezměnila, a obě jsou  $a^2 = 16 \text{ cm}^2$ . Pak tam máme dvě boční stěny, které se také nezměnily, a ty mají také plochu  $a^2 = 16 \text{ cm}^2$ . Zbývají čtyři stejné plošky, které jsou obdélníky, přičemž výška je 4 cm a šířka je polovina úhlopříčky čtverce o straně  $a$ . Plocha jednoho obdélníku je

proto  $P = a \cdot \frac{a}{2}\sqrt{2}$ . Celkově je tak plocha tělesa  $P = 4 \cdot a \cdot \frac{a}{2}\sqrt{2} + 4 \cdot a^2 = 4 \cdot a^2 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + 1\right) = 64 \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + 1\right) = 109,25 \text{ cm}^2$ . Řešením je (A).

## 18 Tato kapitola záměrně chybí

## 19 PARABOLA

### 19.1 2014J\_08 parabola



max. 3 body

8 Pro  $x \in \mathbf{R}$  je dána funkce  $f: y = (2 - x)(2 + x)$ .

8.1 Sestrojte graf funkce  $f$ .

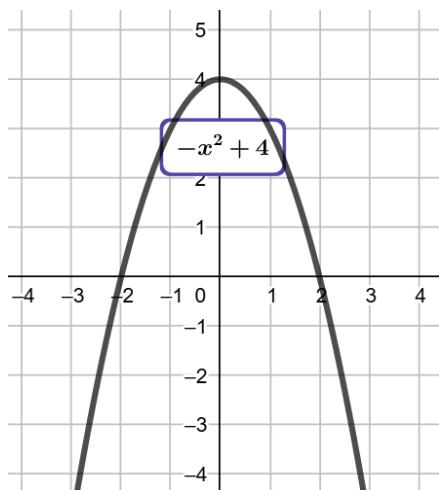
**V záznamovém archu** obtáhněte graf **propisovací tužkou**.

8.2 Zapište souřadnice průsečíku  $P[x; y]$  grafu funkce  $f$  se souřadnicovou osou  $y$ .

8.3 Zapište všechny hodnoty proměnné  $x \in \mathbf{R}$ , pro něž je hodnota funkce  $f$  kladná ( $y > 0$ ).

Řešení.

Nejdříve jako vždy zjednodušíme zápis funkce. Je to dokonce vzorec typu  $(a-b)(a+b)$ , takže máme  $y = 4 - x^2$ , čili je to parabola. Protože má záporný koeficient u  $x^2$ , je obrácená dolů. A zároveň je posunutá o 4 směrem nahoru, takže vypadá přesně jako na obrázku. Vidíme, že se souřadnicovou osou má průsečík (vrchol)  $P[0; 4]$  a je záporná pro všechna  $x \in (-2; 2)$



Obr.: [VK]

Řešení bychom zapsali takto:  $P[0; 4], x \in (-2; 2)$

## 19.2 2014P\_25 exponenciála, přímka, hyperbola, parabola

Přiřad'te ke každému předpisu funkce (25.1-25.4) odpovídající graf funkce (A-F).

Předpisy funkcí si můžete nejprve upravit.

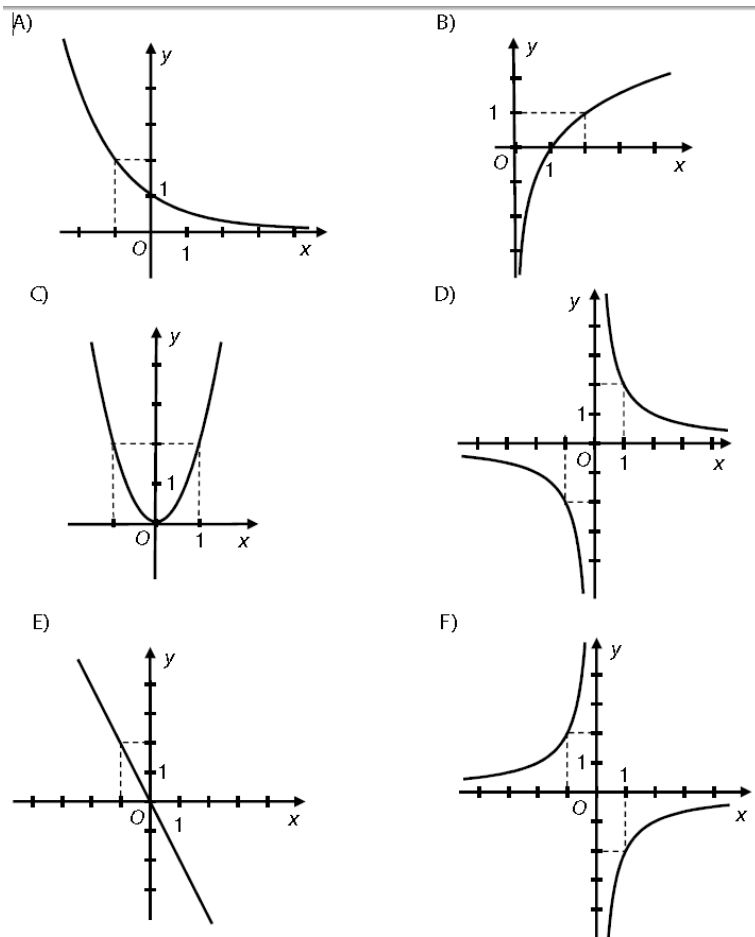
max 4 body

25.1  $y = (2^{-1})^x$  \_\_\_\_\_

25.2  $y = 2(-x)^2$  \_\_\_\_\_

25.3  $y = 2(-x)^{-1}$  \_\_\_\_\_

25.4  $y = 2(-x)$  \_\_\_\_\_



Řešení. Základem je opravdu upravit předpisy funkcí tak, aby bylo zřejmé, co je to za funkce. Musíme odstranit záporné exponenty.

25.1  $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ , je to mocninná funkce se základem menším než jedna, čili bude klesající, evidentně je to obrázek (A), souhlasí tam i dva body, kterými graf prochází:  $[-1; 2]$  a  $[0; 1]$

25.2  $y = 2x^2$ , je to jasná parabola, a ta je jediná na obrázku (C), souhlasí tam i tři body, kterými graf prochází:  $[-1; 2]$  a  $[0; 0]$  a  $[1; 2]$

25.3  $y = \frac{-2}{x}$ , je to evidentně hyperbola se záporným koeficientem, čili bude překlopená dolů, evidentně je to obrázek (F), souhlasí tam i dva body, kterými graf prochází:  $[-1; 2]$  a  $[1; -2]$

25.4  $y = -2x$ , je to jasná přímka, a ta je jediná na obrázku (E), souhlasí tam i 2 body, kterými graf prochází:  $[0; 0]$  a  $[-1; 2]$

## 19.3 2017J\_16 parabola

max. 2 body

16 Grafem kvadratické funkce  $f: y = 9 - x^2$  pro  $x \in \mathbf{R}$  je parabola.

Rozhodněte o každém z následujících tvrzení (16.1–16.4), zda je pravdivé (A), či nikoli (N).

16.1 Vrchol paraboly je  $V[0; 9]$ .

A	N
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

16.2 Jeden z průsečíků paraboly se souřadnicovými osami je  $P[-3; 0]$ .

<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
--------------------------	--------------------------

16.3  $f(0) = -3$

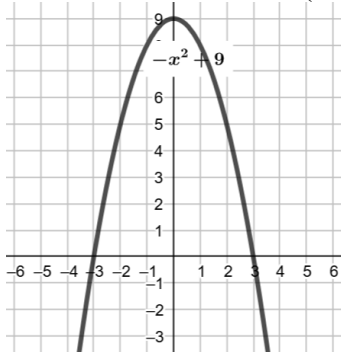
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
--------------------------	--------------------------

16.4 Obor hodnot funkce  $f$  je  $H_f = \langle 9; +\infty \rangle$ .

<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
--------------------------	--------------------------

Řešení.

Graf této funkce je až na posun stejný jako v prvním příkladu. Je to parabola a protože má záporný koeficient u  $x^2$ , je obrácená dolů. A zároveň je posunutá o 9 směrem nahoru, takže vypadá přesně jako na obrázku. Vidíme vrchol  $V[0; 9]$ , bod  $P[-3; 0]$  je opravdu průsečík se souřadnicovou osou  $x$ ,  $f(x) = 9 - x^2$ , tj  $f(0) = 9 - 0 = 9$ , čili 16.3 neplatí. Obor hodnot je množina hodnot, které funkce nabývá, a to vidíme z obrázku, že to jsou všechny hodnoty od mínus nekonečna do 9 (včetně), čili 16.4 neplatí.



Obr.: [VK]

Řešení je tedy **A,A,N,N**.

## 19.4 2018P\_25 parabola, přímka, konstanta

max. 4 body

25 Ke každé z následujících funkcí (25.1–25.4) s definičním oborem  $\mathbb{R}$  přiřadte obor hodnot (A–F) dané funkce.

25.1  $y = (x - 3)^2$

\_\_\_\_\_

25.2  $y = 3 + x^2$

\_\_\_\_\_

25.3  $y = x - 3$

\_\_\_\_\_

25.4  $y = 3$

\_\_\_\_\_

- A)  $\mathbb{R}$
- B)  $(-\infty; 0)$
- C)  $(-\infty; 3)$
- D)  $\langle 0; +\infty$
- E)  $\langle 3; +\infty$
- F)  $\{3\}$

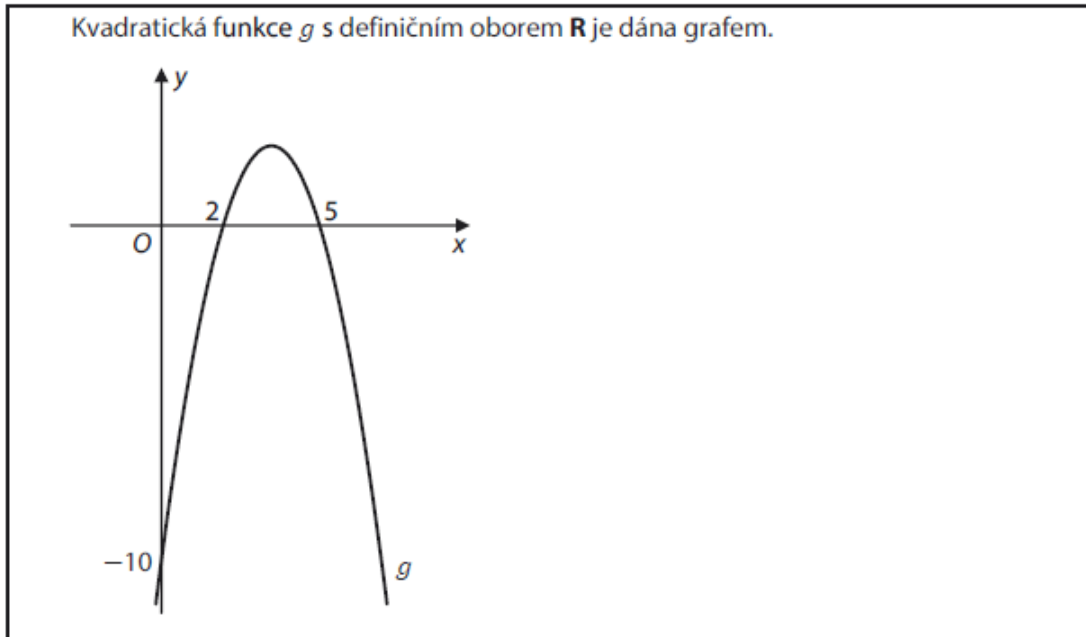
Řešení.

Obor hodnot je množina hodnot, které funkce nabývá, a to nejlépe uvidíme z obrázku. Musíme si nakreslit grafy těchto funkcí a obor hodnot určit z obrázku. 25.4 je konstanta, takže odpověď je (F). 25.3 je přímka, takže nabývá všech hodnot  $\mathbb{R}$ , tj. odpověď je (A). Zbývající dvě jsou paraboly, a to obrácené nahoru, čili budou nabývat hodnot od vrcholu (tam mají minimální hodnotu) do plus nekonečna, takže řešení je 25.1 = (D), 25.2 = (E).

Řešení je **DEAF**.

## 19.5 2019P\_17 parabola

### VÝCHOZÍ TEXT A GRAF K ÚLOZE 17



(CZVV)

2 body

17 Které z následujících vyjádření je předpisem funkce  $g$ ?

- A)  $y = x^2 + 7x - 10$
- B)  $y = -x^2 + 7x + 10$
- C)  $y = -(x + 2)(x + 5)$
- D)  $y = (x - 2)(x + 5)$
- E)  $y = (x - 2)(5 - x)$

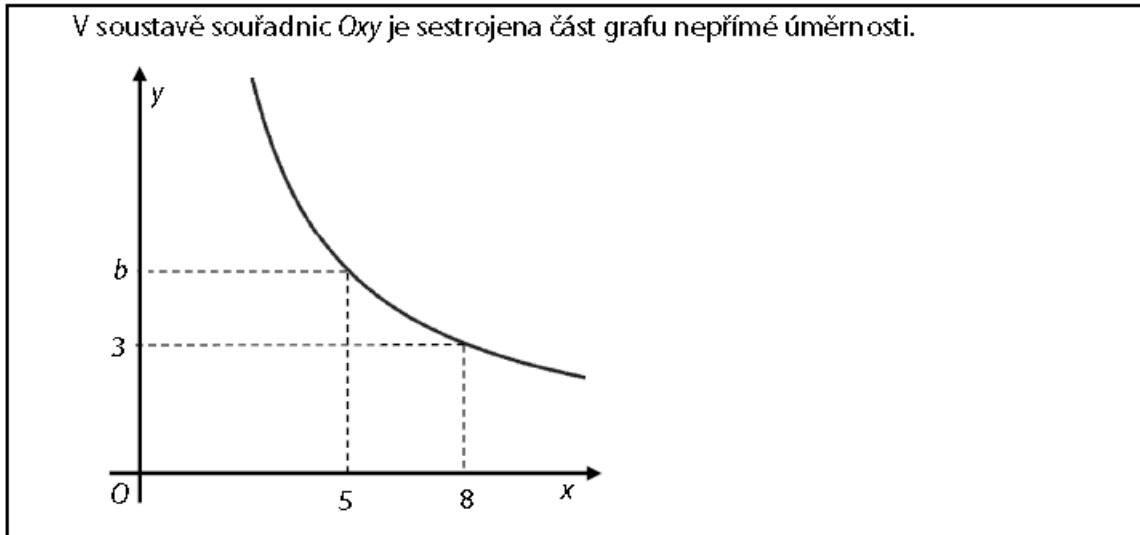
Řešení.

Řešení se zdá zapeklité. Strategie ale říká, že musíme využít všechny body, které jsou v obrázku grafu zakresleny. Tady to jsou body  $[0; -10]$ ,  $[2; 0]$  a  $[5; 0]$ . Když za  $x$  dosadíme postupně 0, 2 a 5, musí nám  $y$  vyjít -10, 0 a 0. První vyškrtáme (B), potom (A) a (C) a nakonec (D). Zbyde řešení (E).

# 20HYPERBOLA

## 20.1 2015J\_07 hyperbola

### VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 7



(CZVV)

**1 bod**

**7 Vypočtěte hodnotu  $b$ .**

Řešení.

Hyperbola má vzorec  $y = \frac{k}{x}$  pro libovolné nenulové  $k \in \mathbf{R}$ , takže stačí dosadit do tohoto vzorce body, které vidíme na grafu  $[5; b]$  a  $[8; 3]$ :

$$b = \frac{k}{5}$$

$$8 = \frac{k}{3}$$

Odtud vypočteme  $k = 24$  a  $b = \frac{24}{5}$ . Zapišeme řešení

$$b = \frac{24}{5} \quad \text{nebo} \quad K = \left\{ \frac{24}{5} \right\}.$$

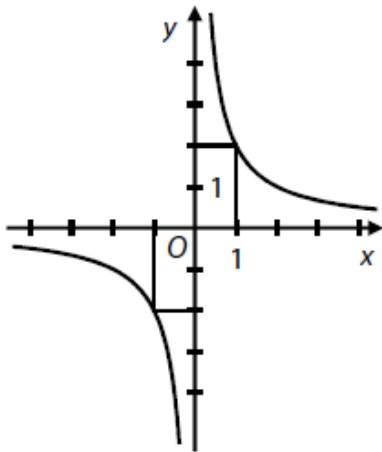
=====

## 20.2 2015J\_25 přímka, hyperbola

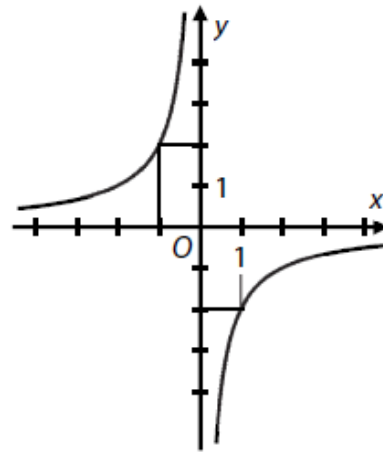
max. 4 body

25 Přiřadte ke každému grafu funkce (25.1–25.4) odpovídající předpis funkce (A–F).

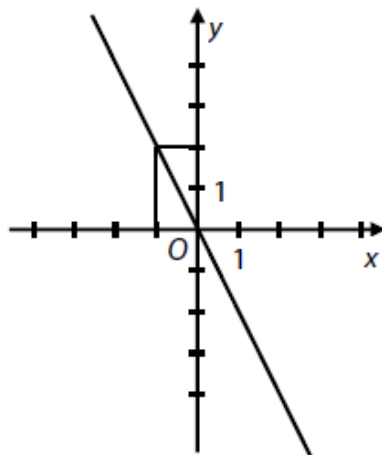
25.1



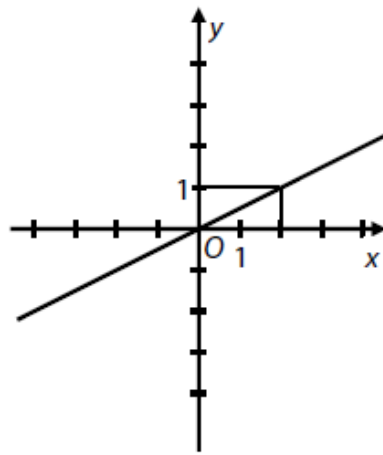
25.2



25.3



25.4



Ke grafům máme k dispozici tyto možnosti funkcí:

$$(A) y = \frac{2}{x^{-1}}, (B) y = \frac{-x}{2^{-1}}, (C) y = 2^{-1} \cdot x, (D) y = \left(\frac{x}{2}\right)^{-1}, (E) y = -2 \cdot x^{-1}, (F) y = -2^{-1} \cdot x^{-1}$$

A máme doplnit písmena:

25.1 \_\_\_\_\_

25.2 \_\_\_\_\_

25.3 \_\_\_\_\_

25.4 \_\_\_\_\_

Řešení: Nejprve je potřeba se zbavit záporných mocnin, které dělají zápis nepřehledným:

$$(A) y = 2 \cdot x, (B) y = -2 \cdot x, (C) y = \frac{x}{2}, (D) y = \frac{2}{x}, (E) y = \frac{-2}{x}, (F) y = \frac{-1}{2 \cdot x}$$

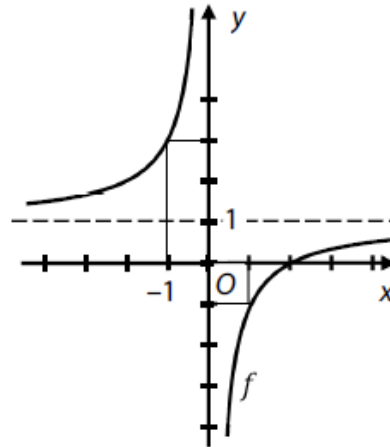
Z těchto zápisů nyní jasně vidíme, že ABC jsou přímky a DEF jsou hyperboly. (D) je kladná hyperbola, takže to musí být jedině 25.1. (EF) jsou záporné hyperboly, ale 25.2 prochází bodem [1; -2], takže to musí být (E). Hyperboly máme tedy určené. 25.3 je “záporná” přímka,

což je z možností (ABC) pouze (B). Poslední přímka 25.4. je kladná a prochází bodem [2; 1], což z (AC) splňuje jen (C). Řešení je tedy **D,E,B,C**.

## 20.3 2018P\_24 hyperbola

### VÝCHOZÍ TEXT A GRAF K ÚLOZE 24

V kartézské soustavě souřadnic  $Oxy$  je sestrojen graf lineární lomené funkce  $f$  s definičním oborem  $\mathbf{R} \setminus \{0\}$ .



(CZW)

2 body

24 Jaký je předpis funkce  $f$ ?

- A)  $y = \frac{-2}{x}$
- B)  $y = \frac{2}{x-2}$
- C)  $y = \frac{x-2}{x+2}$
- D)  $y = \frac{x-2}{-x+2}$
- E)  $y = \frac{x-2}{x}$

Řešení.

Využijeme všechny body, které jsou v grafu vyznačené a zjistíme, která z funkcí ABCDE tomu vyhovuje. Na grafu jasně vidíme body  $[-1; 3]$  a  $[1; -1]$ . Když dosadíme za  $x = -1$ , musíme dostat  $y = 3$  a když dosadíme za  $x = 1$ , musíme dostat  $y = -1$ . Už prvnímu bodu vyhovuje jen (E). A vyhovuje i druhému bodu, takže řešením je (E).

## 20.4 2021P\_25 hyperbola, parabola, logaritmus, přímka

max. 4 body

25 Každou z následujících funkcí (25.1–25.4) definujeme pro  $x \in (0; +\infty)$ .

Přiřaďte ke každému předpisu funkce (25.1–25.4) odpovídající graf funkce (A–F).

25.1

$$y = \frac{x^2 - x}{x} \quad \text{_____}$$

25.2

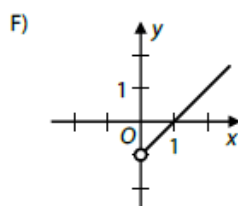
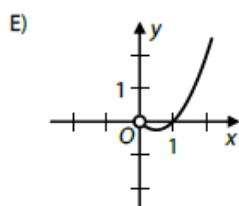
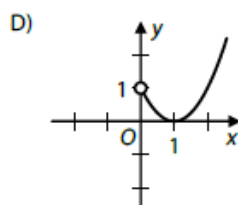
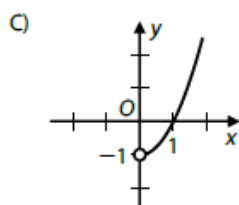
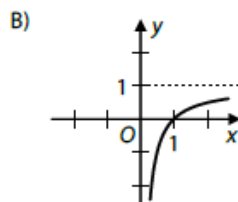
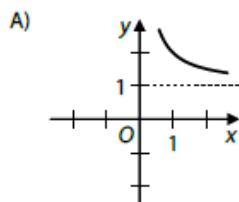
$$y = \frac{x^3 - x}{x} \quad \text{_____}$$

25.3

$$y = \frac{x^2 - x}{x^2} \quad \text{_____}$$

25.4

$$y = (x^2 - x) \cdot \log_4 4 \quad \text{_____}$$



Řešení.

Opět, než se pustíme do řešení, musíme předpisy těch funkcí 25.1 až 25.4 zjednodušit. Navíc všechny ty funkce jsou definovány jen pro kladná  $x$  !!!, viz zadání.

25.1 je  $y = x - 1$  pro  $x \neq 0$ , takže to je **přímka (F)**

25.2 je  $y = x^2 - 1$  pro  $x \neq 0$ , takže to je **parabola** a stačí zkontrolovat, jestli prochází body jako paraboly na obrázku (CDE), vyhovuje jen **(C)**

25.3 je  $y = 1 - \frac{1}{x}$  pro  $x \neq 0$ , takže to je **hyperbola** a stačí zkontrolovat, jestli prochází body jako paraboly na obrázku (AB), vyhovuje jen **(B)**

25.4 je  $y = x^2 - x$ , protože  $\log_4 4 = 1$ , takže to je **parabola** a stačí zkontrolovat, jestli prochází body jako paraboly na obrázku (DE), vyhovuje jen **(E)**

Řešení je **FCBE**.

## 21 MOCNINA A EXPONENCIÁLA

### 21.1 2013\_soubor-vzorovych-uloh (2)

Vyjádřete jako jedinou mocninu se základem 2:

$$2^{200} \cdot 2^{100} + 8^{100} =$$

Řešení.

I když jsou tady mocniny dvou a mocnina osmi, tak jako tak to jsou mocniny dvou, takže vše převedeme na mocniny dvou:

$$2^{200} \cdot 2^{100} + 8^{100} = 2^{300} + (2^3)^{100} = 2^{300} + 2^{300} = 2 \cdot 2^{300} = 2^{301}$$

### 21.2 2013\_soubor-vzorovych-uloh (3)

Pro  $m \in \mathbb{Z}$  zjednodušte:

$$4^m(4^{m+1} - 3 \cdot 4^m) =$$

Řešení.

K vyřešení úlohy si stačí uvědomit, že  $4^{m+1}$  je  $4 \cdot 4^m$ . Pak v závorce je  $4 \cdot 4^m - 3 \cdot 4^m$ . To je číslo, z kterého můžeme  $4^m$  vytknout a máme  $4^m \cdot (4 - 3) = 4^m$ . Nebo si jednoduše uvědomíme, že máme 4 krát nějaké číslo (a odčítáme od něj 3 krát to samé číslo, čili výsledkem je 1 krát to číslo. Závorka je pak rovna číslu  $4^m$  a celkově je výsledek  $4^m \cdot 4^m = 4^{2m}$ .

## 21.3 2014P\_25

25 Přiřadte ke každému předpisu funkce (25.1–25.4) odpovídající graf funkce (A–F).

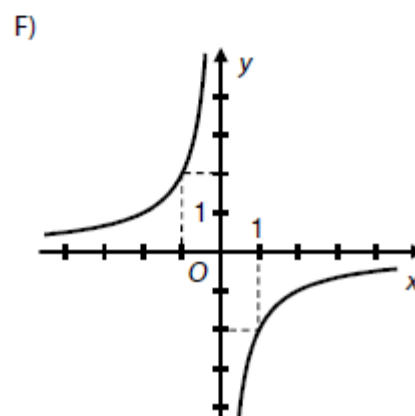
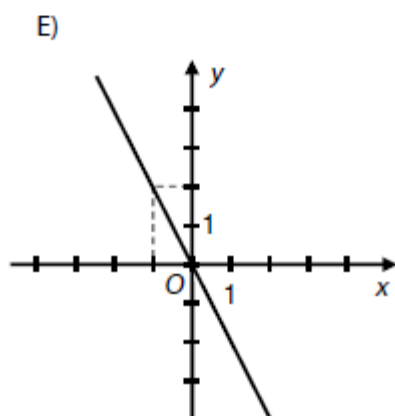
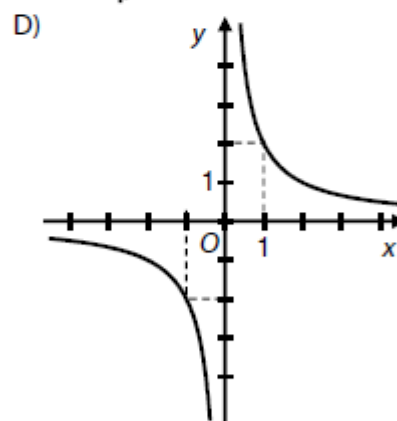
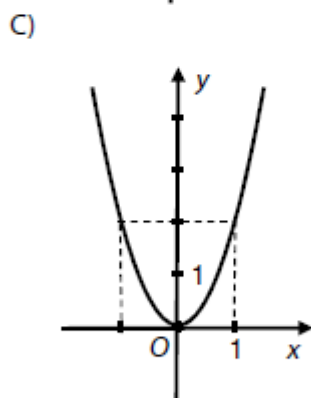
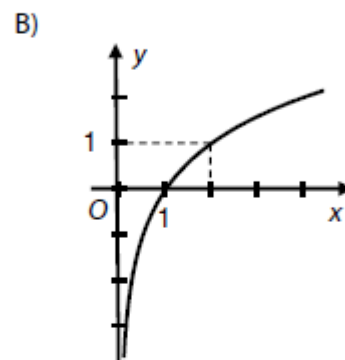
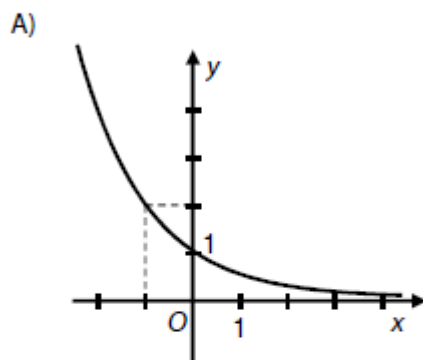
Předpisy funkcí si můžete nejprve upravit.

25.1  $y = (2^{-1})^x$  \_\_\_\_\_

25.2  $y = 2(-x)^2$  \_\_\_\_\_

25.3  $y = 2(-x)^{-1}$  \_\_\_\_\_

25.4  $y = 2(-x)$  \_\_\_\_\_



Řešení.

**Při řešení grafických úloh vždy identifikujeme všechny body grafu, které jsou v grafu vyznačené.** Například u prvního grafu vidíme dva body  $[-1;2]$  a  $[0;1]$ , které Cermat vyznačil. Postačí do nabízených funkcí

$$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x, y = 2x^2, y = \frac{-2}{x}, y = -2x$$

dosadit  $x = 0$  a ihned zjistíme, že jediným kandidátem je první funkce  $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ , takže 25.1=A. Funkce  $y = 2x^2$  je parabola, a grafem je jediné 25.2 = (C), kde souhlasí i tři vyznačené body pro  $x = -1, 0, 1$ . Funkce  $y = \frac{-2}{x}$  je hyperbola, průchozí body souhlasí u 25.3=(F). Funkce  $y = -2x$  je přímka (E).

Řešení je **ACFE**.

## 21.4 2017J\_13

Vyřešte rovnici v  $\mathbb{R}$ :

$$3 \cdot 9^x - 9^x = 6$$

Řešení.

Tady můžeme čísla nalevo sčítat, protože se jedná jen o 3 krát nějaké číslo ( $9^x$ ) mínus 1 krát totéž číslo, čili máme rovnici 2 krát ( $9^x$ ) = 6

$$9^x = 3, \text{ tj. } x = \frac{1}{2} \text{ nebo můžeme zapsat } K = \left\{\frac{1}{2}\right\}.$$

## 21.5 2020P\_02

Pro  $y \in (0; +\infty)$  zjednodušte:

$$\sqrt{\frac{y^{64}}{16} \cdot \left(\frac{2}{y^7}\right)^4} =$$

Řešení: Postupujeme krok za krokem, děláme jen jednoduché úpravy, abychom mohli pak příklad zkontrolovat!

$$\sqrt{\frac{y^{64}}{16} \cdot \left(\frac{2}{y^7}\right)^4} = \sqrt{\frac{y^{64}}{2^4} \cdot \frac{2^4}{y^{28}}} = \sqrt{\frac{y^{64}}{y^{28}}} = \sqrt{y^{36}} = y^{18}.$$

## 21.6 2021J\_01

Pro  $a \in \mathbb{N}$  upravte výraz a vyjádřete jej ve tvaru odmocniny o základu  $a$ .

$$a^{\frac{1}{4}} : \sqrt[6]{a} =$$

Řešení.

Opět krok za krokem upravujeme

$$= a^{\frac{1}{4}} : a^{\frac{1}{6}} = a^{\frac{1}{4} - \frac{1}{6}} = a^{\frac{1}{12}} = \sqrt[12]{a}.$$

## 21.7 2021J\_mimoradny (1)

Pro  $n \in \mathbb{N}$  odstraňte závorky a sečtěte.

Výsledný výraz vyjádřete jediným členem, a to bez závorek.

$$(-n^4)^{-1} - n^{-4} + (-n)^{-4} =$$

Řešení. Postupujeme opět krok za krokem, děláme jen jednoduché úpravy podle pravidel.

$$\frac{1}{(-n^4)} - \frac{1}{n^4} + \frac{1}{(-n)^4} = -\frac{1}{n^4} - \frac{1}{n^4} + \frac{1}{n^4} = \frac{1}{n^4} = n^{-4}$$

## 21.8 2024P\_07

Předpis funkce  $f$ , definované pro všechna  $x \in \mathbb{R}$ , je

$$y = 5^{x-1} - 5^{x-2}$$

Určete všechna  $x \in \mathbb{R}$ , pro která je hodnota funkce  $f$  rovna 20.

Řešení.

Tady je opět trik, který si musíme pamatovat. Můžeme sčítat třeba  $4 \cdot 5^{x-2}$  a  $3 \cdot 5^{x-2}$ , to je  $7 \cdot 5^{x-2}$ , ale jak sečíst

$$5^{x-1} + 5^{x-2} ?$$

Ta čísla se zase tolik neliší! Trik spočívá v tom, že číslo nalevo má exponent jen o 1 větší, než číslo napravo. Je to vlastně

$$5^{x-1} = 5 \cdot 5^{x-2}.$$

Pak už můžeme tato čísla sečíst nebo odečíst, je to  $5^{x-1} - 5^{x-2} = 5 \cdot 5^{x-2} - 5^{x-2} = 4 \cdot 5^{x-2}$ . Tím máme rovnici

$$4 \cdot 5^{x-2} = 20, \quad \text{čili } 5^{x-2} = 5, \quad 5^{x-2} = 5^1, \quad \text{tj. } x = 3.$$

## 21.9 2026J\_16

16 Existuje právě jedno reálné číslo  $m$ , pro které platí:

2 body

$$\frac{4^m - 32}{2^{4m}} = 0$$

Která rovnost platí pro toto číslo  $m$ ?

A)  $2^{4m} = 32^2$

B)  $2^{4m} = 64$

C)  $2^{4m} = \sqrt{32}$

D)  $2^{4m} = 1$

E)  $2^{4m} = 0$

Řešení.

Nejdřív si uvědomíme, že zlomek v rovnici musí mít v čitateli nulu, ve jmenovateli nula nikdy není, takže podmínky nejsou žádné. Rovnice  $4^m - 32 = 0$  převedeme na mocniny dvojky:  $2^{2m} = 2^5$ , takže  $m = 5/2$ ,  $4m = 10$ . Dosadíme do rovnic a zjistíme, že je splněna rovnice (A).

## 22 LOGARITMY

Dobrá rada: V řadě maturitních příkladů stačí přepsat  $y = \log_a(x)$  na tvar  $x = a^y$ .

# Analytické řešení

## 22.1 2014P\_11

11 V oboru  $\mathbb{R}$  řešte:

$$\log_4(x - 8) = 1$$

Řešení.

Jen přepíšeme podle pravidla  $y = \log_a(x)$  znamená totéž, co  $x = a^y$  takže  $x - 8 = 4^1$ , neboli  $x = 12$ . Nebo  $K = \{12\}$ .

=====

## 22.2 2015J\_06

6 Určete definiční obor a řešení rovnice s neznámou  $x \in \mathbb{R}$ .

$$\log(2 - x) = -1$$

Řešení.

Podmínkou je, aby  $2 - x > 0$ , čili  $x < 2$ . Definiční obor je  $D_f = (-\infty; 2)$  a rovnici přepíšeme podle pravidla  $y = \log_a(x)$  znamená totéž, co  $x = a^y$  takže  $2 - x = 10^{-1}$ , neboli  $x = 2 - \frac{1}{10} = \frac{19}{10}$ . Odpověď je  $D(x) = (-\infty; 2)$ ;  $K = \{\frac{19}{10}\}$ .

=====

## 22.3 2016J\_15

15 Pro  $x \in \mathbb{R}$  určete definiční obor rovnice (podmínky) a rovnici vyřešte.

$$\log 8 - \log 2 = \frac{\log(2x - 2)}{2}$$

V záznamovém archu uveďte celý postup řešení.

Řešení.

Podmínkou je, aby  $2x - 2 > 0$ , čili  $x > 1$ . Definiční obor je  $D_f = (1; +\infty)$  a rovnici přepíšeme podle pravidel a vzorce

$$y = \log_a(x) \text{ znamená totéž, co } x = a^y,$$

$$\log_a(x \cdot y) = \log_a(x) + \log_a(y), \log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y), \log_a(x^n) = n \cdot \log_a(x)$$

$$\log_{10}\left(\frac{8}{2}\right) = \frac{\log_{10}(2x - 2)}{2}$$

$$\log_{10}4 = \frac{\log_{10}(2x - 2)}{2}$$

$$2 \cdot \log_{10}4 = \log_{10}(2x - 2)$$

$$\log_{10}4^2 = \log_{10}(2x - 2)$$

$$\log_{10}16 = \log_{10}(2x - 2)$$

$$16 = 2x - 2$$

$$x = 9$$

Odpověď je  $D(x) = (1; +\infty)$ ,  $K = \{9\}$ .

=====

## 22.4 2017P\_07

**7** Pro všechna  $x, y \in (0; +\infty)$  platí:

$$\log y = 2 \log x + 2$$

**Vyjádřete proměnnou  $y$  tak, aby zápis neobsahoval logaritmy.**

Řešení.

Rovnici přepíšeme podle pravidla

$$y = \log_a(x) \quad \text{znamená totéž, co} \quad x = a^y,$$

$$\log_a(x \cdot y) = \log_a(x) + \log_a(y), \log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y), \log_a(x^n) = n \cdot \log_a(x)$$

$$\log_{10}y = 2 \cdot \log_{10}x + 2$$

$$\log_{10}y = \log_{10}x^2 + 2$$

$$\log_{10}y = \log_{10}x^2 + \log_{10}100$$

$$\log_{10}y = \log_{10}(x^2 \cdot 100)$$

$$y = 100 \cdot x^2$$

Odpověď je  $y = 100 \cdot x^2$

=====

## 22.5 2021J\_10

**10** V oboru  $\mathbb{R}$  řešte:

$$2^{5x} - \log_5 \sqrt{5} = 0$$

Řešení.

Rovnici přepíšeme podle pravidel a vzorce

$$y = \log_a(x) \quad \text{znamená totéž, co} \quad x = a^y,$$

$$\log_a(x \cdot y) = \log_a(x) + \log_a(y), \log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y), \log_a(x^n) = n \cdot \log_a(x)$$

$$\log_5 \sqrt{5} = \log_5 \left(5^{\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{2}$$

$$2^{5x} - \frac{1}{2} = 0$$

$$2^{5x} = 2^{-1}$$

$$5x = -1$$

$$x = -\frac{1}{5}$$

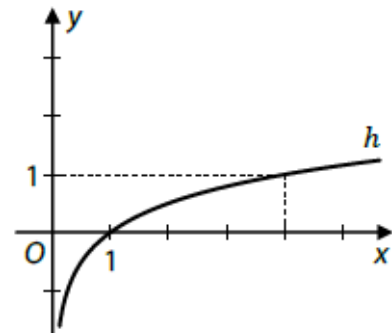
Odpověď je  $K = \left\{-\frac{1}{5}\right\}$

=====

## 22.6 2022J\_10

### VÝCHOZÍ TEXT A GRAF K ÚLOZE 10

V kartézské soustavě souřadnic  $Oxy$  je sestaven graf logaritmické funkce  $h: y = \log_a x$ , jejímž definičním oborem je interval  $(0; +\infty)$ .



(CZVV)

max. 2 body

**10 Určete**

10.1 základ  $a$  logaritmické funkce  $h$ ,

10.2 hodnotu proměnné  $x$ , pro kterou  $h(x) = 3$ .

Řešení: Protože základ  $a$  logaritmické funkce splňuje rovnici  $\log_a a = 1$ , funkce  $h$  na obrázku má základ  $a = 4$ . A pak máme najít  $x$ , pro něž  $\log_a x = 3$ , čili řešit rovnici  $\log_4 x = 3$ . Takže  $x = 4^3 = 64$ .

Odpověď je  $a = 4$ ;  $x = 64$

=====

## 22.7 2023J\_07

**7** Je dán výraz:

$$\log_2(8^{-x})$$

**Určete všechna  $x \in \mathbb{R}$ , pro která je hodnota daného výrazu rovna osmi.**

**V záznamovém archu uveďte celý postup řešení.**

Řešení.

Rovnici přepíšeme podle pravidla  $y = \log_a(x)$  znamená totéž, co  $x = a^y$ :

$$\log_2(8^{-x}) = 8$$

$$\log_2(8^{-x}) = \log_2(2^8)$$

$$8^{-x} = 2^8$$

$$(2^3)^{-x} = 2^8$$

$$2^{-3x} = 2^8$$

$$-3x = 8$$

$$x = -\frac{8}{3}$$

Odpověď je  $x = -\frac{8}{3}$

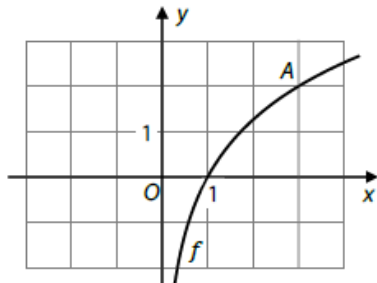
=====

# Grafické řešení

## 22.8 2021J\_mimoradny\_termin\_17

### VÝCHOZÍ TEXT A GRAF K ÚLOZE 17

Logaritmická funkce  $f: y = \log_a x$  s definičním oborem  $(0; +\infty)$  je dána grafem. Graf prochází mřížovým bodem A.



(CZW)

2 body

17 Jaká je hodnota základu  $a$  logaritmické funkce  $f$ ?

- A)  $\frac{2}{3}$
- B)  $\sqrt[3]{2}$
- C)  $\sqrt{2}$
- D)  $\frac{3}{2}$
- E)  $\sqrt{3}$

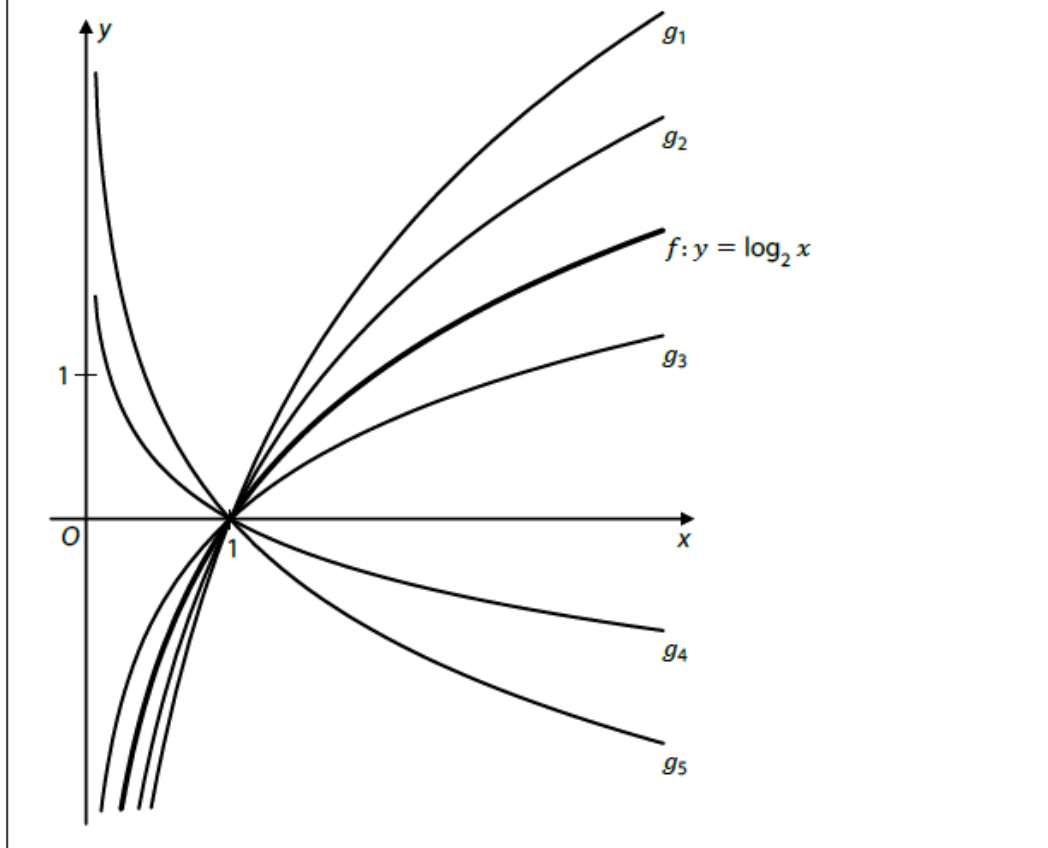
Řešení.

Protože graf prochází bodem A, musí platit  $2 = \log_a(3)$ , takže  $a^2 = 3$ , tj.  $a = \sqrt{3}$   
Odpověď je (E).

## 22.9 2021J\_20

### VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 20

V kartézské soustavě souřadnic  $Oxy$  je sestrojen graf funkce  $f: y = \log_2 x$  a grafy pěti dalších logaritmických funkcí  $g_1-g_5$  s předpisy  $y = \log_a x$ , v nichž se základy  $a$  vzájemně liší. Všechny tyto funkce mají definiční obor  $(0; +\infty)$ .



(CZW)

2 body

20 Kolik z daných funkcí  $g_1-g_5$  má základ menší než 2 (tj.  $a < 2$ )?

- A) nelze určit
- B) 1
- C) 2
- D) 3
- E) 4

Řešení: základy funkcí  $g_5, g_4, g_3$  jsou menší než 2 (protože jsou pod funkcí  $f$ ), pak následuje  $\log_2 x$  a potom  $g_2, g_1$  se základy logaritmu většími než 2. Řešení je (D). Elegančně by šlo vyřešit úlohu tak, kdybychom udělali přímkou  $y = 1$  a protнули jí s grafy logaritmů. Základy logaritmů funkcí  $g_5, g_4, g_3, g_2, g_1$  by se projevíly jako  $x$ -ové souřadnice průsečíků přímkou  $y = 1$  s funkcemi  $g_5, g_4, g_3, g_2, g_1$ . Proč? Protože v těch  $x$ -ových souřadnicích bude  $\log_a x = 1$ , čili  $a = x$ . Proto základy logaritmů  $g_5, g_4, g_3, g_2, g_1$  budou  $x$ -ové souřadnice těch průsečíků s přímkou  $y = 1$ . A vypadá to postupně na základy (zleva doprava)  $x = \frac{1}{10}; \frac{1}{3}; 1,3; 1,5; 2; 3$ . Řešení je (E).

## 23 ANALYTICKÁ GEOMETRIE

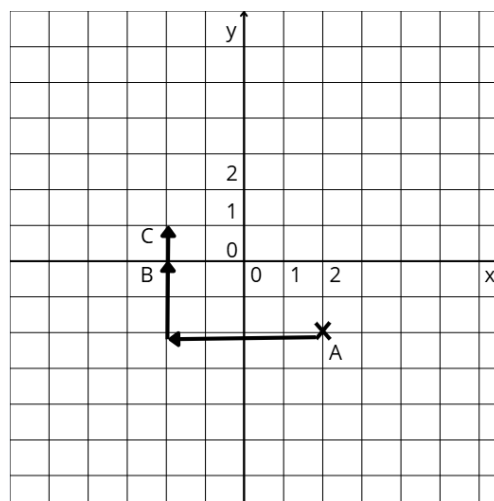
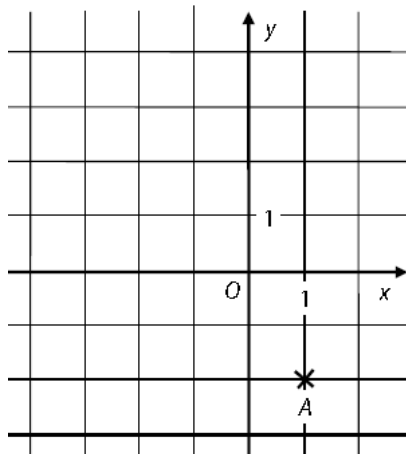
### 23.1 2014J\_12, vektory a jednoduchá vzdálenost

V kartézské soustavě souřadnic  $Oxy$  je (v mřížovém bodě) umístěn bod  $A$ .

Dále platí:  $\vec{AB} = (-4; 2)$  a  $\vec{AC} = (-4; 3)$ .

**Určete vzdálenost bodu  $A$  od přímky  $BC$ .**

Řešení.



Obr.: [CZVV] a [VK]

Řešení je jednoduché na obrázku vpravo. Nakreslíme vektor  $\vec{AB}$  tak, že jdeme z bodu  $A$  -4 kroků doleva ve směru osy  $x$  a potom +2 kroky nahoru ve směru osy  $y$ , a tam zakreslíme bod  $B$ . Podobně nakreslíme vektor  $\vec{AC}$  tak, že jdeme z bodu  $A$  -4 kroky doleva ve směru osy  $x$  a +3 kroky nahoru ve směru osy  $y$ , a tam zakreslíme bod  $C$ . Tím je také jasně vidět vzdálenost bodu  $A$  od přímky  $BC$ , což se zapíše jako  $|A \leftrightarrow BC| = 4$

## 23.2 2014J\_23, střed úsečky a vzdálenost dvou bodů

2 body

23 V trojúhelníku  $ABC$  je dáno:  $A[4; -3]$ ,  $B[4; 3]$ ,  $C[2; 1]$ .

Jaká je vzdálenost vrcholu  $A$  od středu  $S$  úsečky  $BC$ ?

- A) 4
- B)  $\sqrt{17}$
- C) 5
- D)  $\sqrt{26}$
- E) jiná vzdálenost

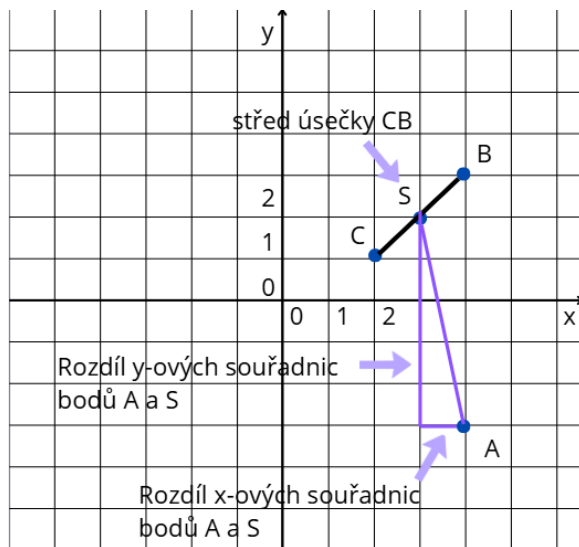
Řešení. V tomto případě můžeme výpočet udělat „naslepo“ jen podle vzorečků. Střed úsečky  $BC$  má souřadnice

$$S = \frac{B + C}{2} = \frac{[4; 3] + [2; 1]}{2} = \left[ \frac{4 + 2}{2}; \frac{3 + 1}{2} \right] = [3; 2]$$

a vzdálenost bodů  $A[4; -3]$  a  $S[3; 2]$  je

$$|AS| = \sqrt{(x_A - x_S)^2 + (y_A - y_S)^2} = \sqrt{(4 - 3)^2 + (-3 - 2)^2} = \sqrt{1 + 25} = \sqrt{26}, \text{ tedy (D)}$$

Nicméně **náčrt nám vždy pomůže v představě a dokonce v kontrole řešení.**



Obr.: [VK]

obecně vzdálenost dvou bodů  $A, B$  je

$$|AB| = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2},$$

protože je to přepona pythagorejského trojúhelníku, viz též obr.

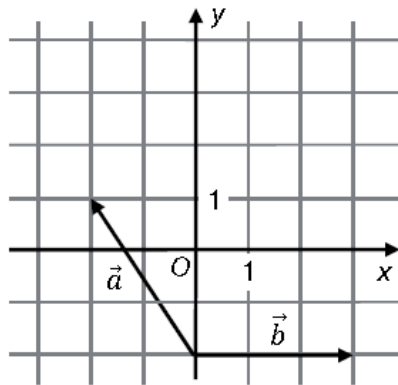
obecně střed úsečky  $AB$  je

$$S = \frac{A + B}{2} = \frac{[x_A; y_A] + [x_B; y_B]}{2} = \left[ \frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2} \right].$$

## 23.3 2014P\_09, součet dvou vektorů

### VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 9

Počáteční a koncové body obou zobrazených vektorů jsou v mřížových bodech.



(CERMAT)

max. 2 body

9

9.1 Zapište souřadnice vektoru  $\vec{b}$ .

9.2 Platí:  $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ .

Zapište souřadnice vektoru  $\vec{c}$ .

Řešení.

Vektor je rozdíl dvou bodů: koncový bod minus počáteční bod. Tady máme u vektoru  $\vec{b}$  koncový bod  $[3; -2]$  a počáteční bod  $[0; -2]$ , proto

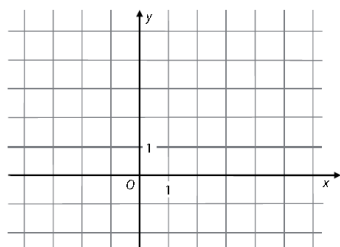
$$\vec{b} = \text{bod}[3; -2] - \text{bod}[0; -2] = (3 - 0, -2 - (-2)) = (3; 0).$$

Podobně vektor  $\vec{a} = \text{bod}[-2; 1] - \text{bod}[0; -2] = (-2 - 0; 1 - (-2)) = (-2; 3)$ .

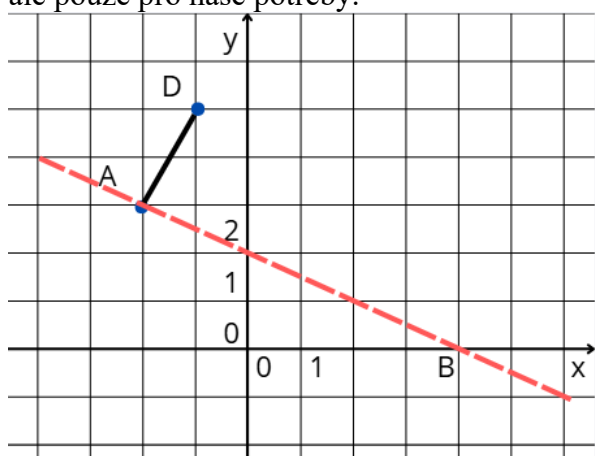
Čistě matematicky součet dvou vektorů vznikne součtem jejich souřadnic:  $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} = (-2; 3) + (3; 0) = (-2 + 3; 3 + 0) = (-1; 3)$ .

## 23.4 2015J\_09, směrový vektor, kolmice

V obdélníku ABCD jsou dány vrcholy A[-2;3] a D[-1;5]. Vrchol B leží na souřadnicové ose x. Určete souřadnice směrového vektoru přímky AB. Určete souřadnice vrcholu B.



Řešení. Jak vidíme, v mřížce na obrázku není žádný údaj, ani se nechce, abychom něco zakreslili, chce se pouze výsledek, žádný záznam a postup. Nicméně náčrtek se bude hodit – ale pouze pro naše potřeby.



Obr.: [VK]

Bod B musí ležet na přímce kolmé k AD, takže do mřížky zakreslíme tuto kolmici. Ta protne osu x v bodě [4;0], což je hledaný bod B. Zbývá určit souřadnice směrového vektoru přímky AB, což je vektor  $\overrightarrow{AB} = B - A = [4; 0] - [-2; 3] = (4 - (-2); 0 - 3) = (6; -3)$ . A máme hotovo. Až na to, že směrový vektor může být také *nenulový násobek vektoru (6; -3), což je správná odpověď.*

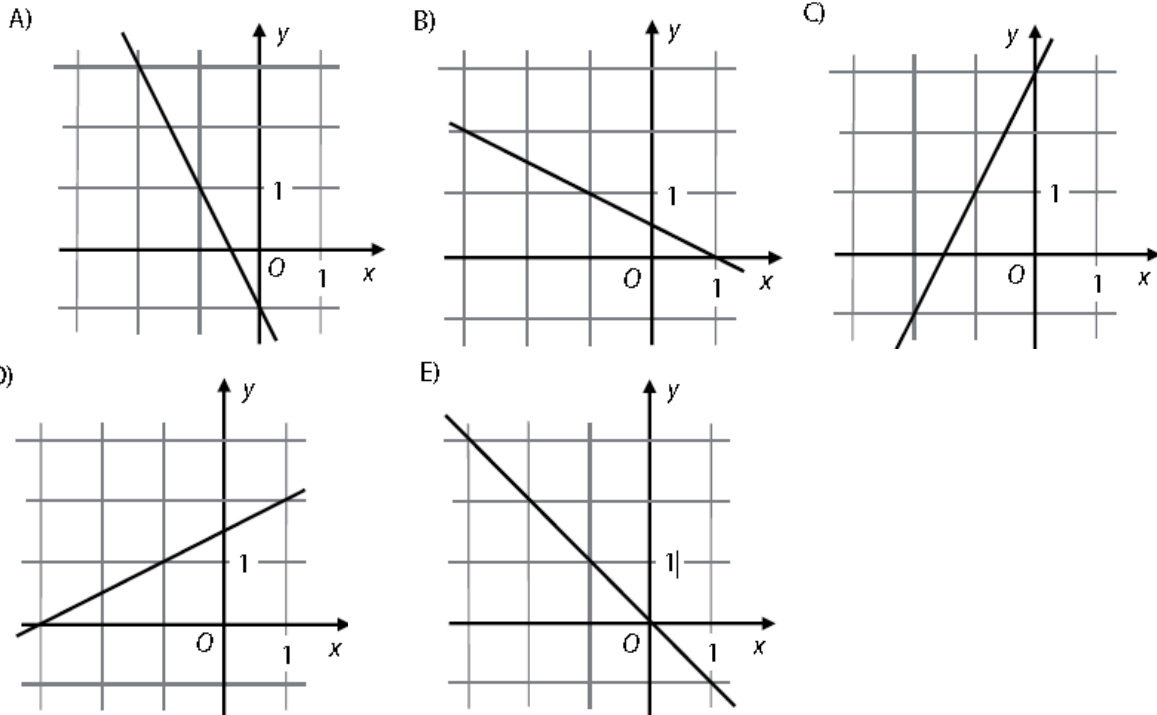
**Toto je navíc:** V příkladu se nepožaduje určení rovnice kolmice na úsečku AD, protože se předpokládá, že studenti ji NAKRESLÍ a výsledek zjistí mj. „opticky“. Kdybychom chtěli kolmici exaktně vypočítat a pak vypočítat průsečík s osou x (bod B), pak bychom postupovali s využitím vzorečků pro kolmé vektory nebo kolmé přímky. Protože budeme potřebovat rovnici té přímky, použijeme **pravidlo pro kolmost přímek**. Kolmé přímky  $y = k_1x + q_1$  a  $y = k_2x + q_2$  musí splňovat pravidlo  $k_1k_2 = -1$ . Řekněme, že přímka AD má rovnici  $y = k_1x + q_1$  a přímka AB rovnici  $y = k_2x + q_2$ . Pak musí splňovat pravidlo  $k_1k_2 = -1$ . Přímku AD určíme snadno, protože do její rovnice dosadíme body A a D. (Dělat to nebudeme, protože vidíme směrnici  $k_1 = \frac{2}{1} = 2$  a posun si domyslíme podle obrázku jako 7. Nicméně ověříme, že  $y = 2x + 7$  prochází body A[-2;3] a D[-1;5]). Nyní dopočteme směrnici přímky AB tak, že  $k_1k_2 = -1$ , tj.  $k_2 = -\frac{1}{k_1} = -\frac{1}{2}$  a zbývá určit posun  $q_2$ . Zjistíme ho dosazením bodu A[-2;3] do rovnice přímky:  $y = -\frac{1}{2}x + q_2$  a dostaneme  $3 = -\frac{1}{2}(-2) + q_2$ , čili  $q_2 = 2$ . Nyní zjistíme, v kterém bodě přímka  $y = -\frac{1}{2}x + 2$  protíná osu x, což je jasně v bodě, kde  $y = 0$ , odtud  $0 = -\frac{1}{2}x + 2$  a vyjde  $x = 4$ , tj. **B = [4;0]**.

## 23.5 2015J\_20, parametrické vyjádření přímky – nebojte se dosadit

Máme úlohu: Je dána přímka

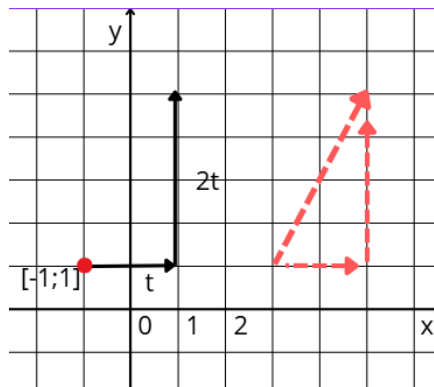
$$p: \begin{cases} x = -1 + t, \\ y = 1 + 2t; t \in \mathbf{R} \end{cases}$$

Na kterém obrázku je přímka  $p$  ?



Řešení. Zlaté pravidlo: Identifikovat všechny body, vyznačené na grafu. Teď ho obrátíme, zvolíme libovolné  $t$ , třeba  $t = 0$ , což se dobře počítá. Přímka tedy musí procházet bodem  $x = -1 + 0, y = 1 + 0$ , tj.  $[-1; 1]$ , což jsou kupodivu všechny přímky. Nevadí, zvolíme  $t = -1$ , přímka musí procházet bodem  $x = -1 + 1 = 0, y = 1 + 2 \cdot 1 = 3$ , tj.  $[0; 3]$ . A to je jen přímka v bodu (C).

**Toto je navíc.** Když už víme, že všechny přímky prochází bodem  $[-1; 1]$ , tak se liší směrovým vektorem, protože přímka je daná bodem a směrových vektorem. Když se podíváme na  $x$ -ovou souřadnici přímky  $p: x = -1 + t$ , tak vidíme, že “roste” od  $-1$  vždy o “ $+t$ ”, zatímco  $y$ -ová souřadnice  $y = 1 + 2t$  “roste” o “ $+2t$ ”. Celkově se tedy z bodu  $[-1; 1]$  vydáme po ose  $x$  o “ $+t$ ” doprava a pak po ose  $y$  o “ $+2t$ ” nahoru. Tím vlastně vytvoříme směrový vektor  $t \cdot (1, 2)$ . Nyní se stačí podívat na nabízené přímky a zjistit, která se z bodu  $[-1; 1]$  vydává směrovým vektorem  $(1, 2)$ .



Obr.: [VK]

### 23.6 2015P\_24, rovnoběžnost a parametrické vyjádření přímky

24 Je dána přímka  $p: -12x + 4y - 5 = 0$ .

Která z následujících přímek je rovnoběžná s přímkou  $p$ ?

- A)  $a: x = 4 + 3t$   
 $y = 12 - t, t \in \mathbf{R}$
- B)  $b: x = 5 + 3t$   
 $y = 5 + t, t \in \mathbf{R}$
- C)  $c: x = 1 - t$   
 $y = 1 + 3t, t \in \mathbf{R}$
- D)  $d: x = 7 + t$   
 $y = 7 + 3t, t \in \mathbf{R}$
- E)  $e: x = -12 - 5t$   
 $y = 4 - 5t, t \in \mathbf{R}$

Řešení.

Přímka  $p$  má normálový vektor  $(-12, 4)$  a směrový vektor  $(4, 12)$ .

Přímky pod body A-E mají směrové vektory:

$(3, -1)$

$(3, 1)$

$(-1, 3)$

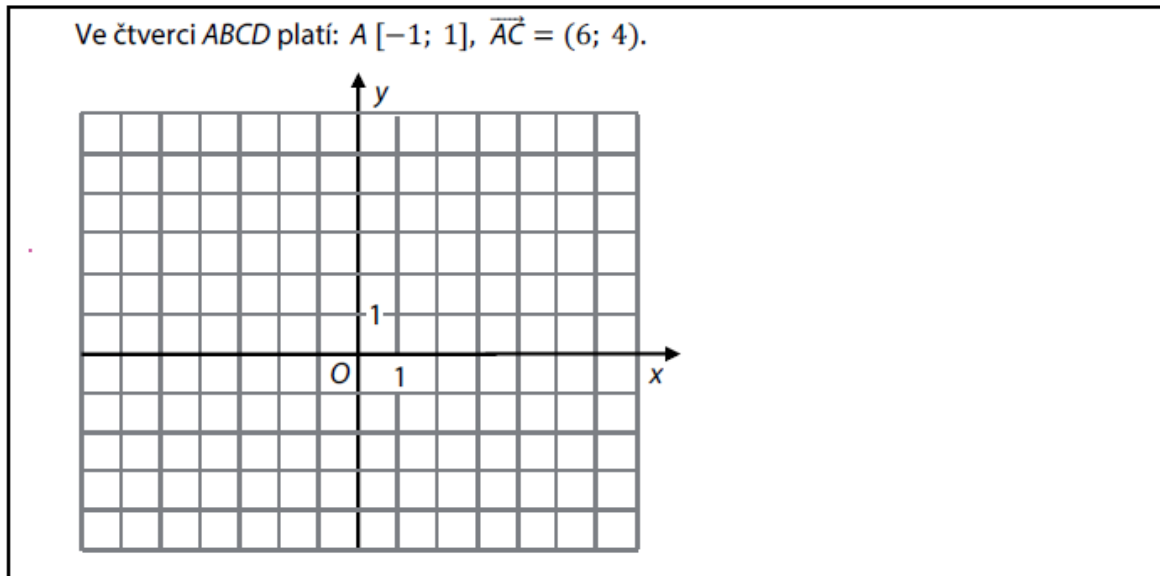
$(1, 3)$

$(-5, -5)$

Směrový vektor  $(4, 12)$  je násobkem vektoru  $(1, 3)$ , tedy řešení je **(D)**.

## 23.7 2017J\_08, čtverec – kreslicí úloha

### VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 8



(CZVV)

max. 3 body

8

8.1 V kartézské soustavě souřadnic  $Oxy$  sestrojte čtverec  $ABCD$ .

V záznamovém archu obtáhněte vše propisovací tužkou.

8.2 Zapište souřadnice středu  $S$  čtverce  $ABCD$ .

8.3 Vypočítejte velikost vektoru  $\vec{AB}$  a výsledek uveďte bez zaokrouhlení.

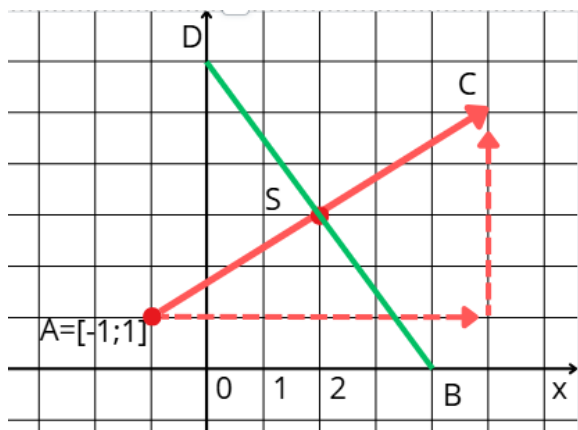
V záznamovém archu vše obtáhněte propisovací tužkou.

Řešení.

Do mřížky zakreslíme bod  $A$  a protože máme vektor  $AC$ , můžeme také z bodu  $A$  popíjít o vektor  $AC$  a dojdeme do bodu  $C$ , který také zakreslíme.  $AC$  je úhlopříčka, takže střed čtverce leží uprostřed  $AC$ , proto můžeme zakreslit střed  $S[2;3]$  (nemusíme počítat). Ze středu  $S$  vztyčíme kolmici a zakreslíme druhou úhlopříčku. Tím dostaneme bod  $B[4;0]$  a vzdálenost bodů  $A[-1;1]$ ,  $B[4;0]$  už vypočteme pomocí vzorce (Pythagorovu větu):

$$|AB| = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2} = \sqrt{(-1 - 4)^2 + (1 - 0)^2} = \sqrt{26},$$

viz též obr.



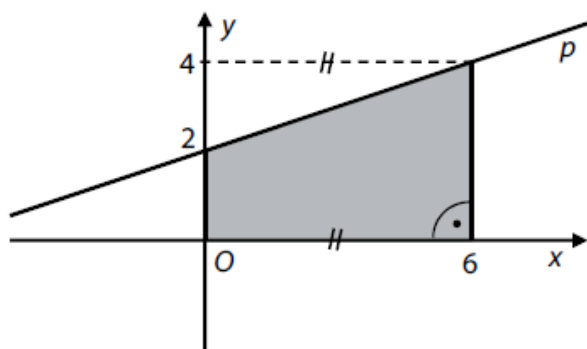
Obr.: [VK]

Pak musíme zakreslit čtverec a odpovědět podle zadání, tj. jako Cermat takto:

8.1	
8.2	$S[2; 3]$
8.3	$ \overline{AB}  = \sqrt{26}$

### 23.8 2017J\_09, přímka – odchylka

V následující úloze musíme využít všechny body a vzdálenosti, které jsou nakresleny na obrázku. To je obecné pravidlo, které nám umožní rychle vyřešit tuto úlohu.

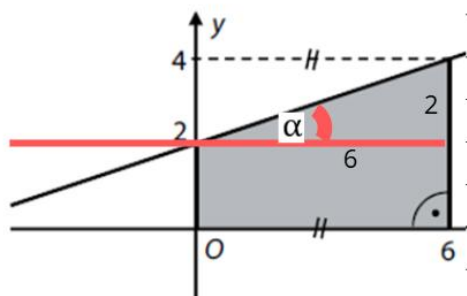


9.1 Máme zapsat obecnou rovnici přímky p

9.2 a vypočítat odchylku přímky p a souřadnicové osy x

Řešení.

Úhel mezi osou x a přímkou můžeme zjistit posunem osy x o 2 nahoru, jak ukazuje obrázek.



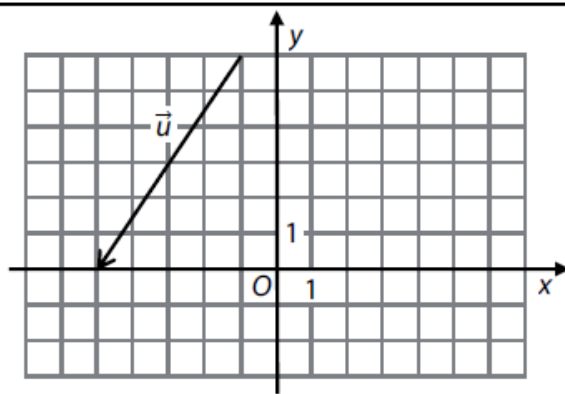
Obr.: [CZVV] a [VK]

Zároveň tam vidíme úhel  $\alpha$ , jehož tangens je  $tg(\alpha) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ . Je to zároveň směrnice přímky  $p$ . Navíc vidíme i posun této přímky na ose  $y$ , čili máme přímku  $p$  celou:  $y = \frac{1}{3}x + 2$ . Základní tvar přímky je pak  $\mathbf{p: x - 3y + 6 = 0}$ . Zbývá ještě na kalkulačce spočítat úhel  $\alpha$  z hodnoty  $tg(\alpha) = \frac{1}{3}$ . To umí funkce obvykle označená  $tg^{-1}$  a zadává se se shiftem). Vyjde  $\alpha = 18,43^\circ$ . Cermat má výsledek  $18^\circ 26'$ , což je trochu problém, protože Cermat má v zadání, že výsledek chce *ve stupních a minutách*. A to jsme přehlédli. Na kalkulačce je výsledek ve stupních, takže ho musíme ještě převést na stupně a minuty. Je to jako kdybychom řekli: „Je 18,43 hodin“, jenže mi to chceme slyšet jako „je 18 hodin a X minut“, takže 0,43 hodiny musíme převést na minuty, což je  $0,43 \cdot 60$  minut = 25,8 minut, zaokrouhleně 26 minut. Takže  $18,43^\circ$  je  $18^\circ 26'$ . Naštěstí na kalkulačce je tlačítko, které to umí převést samo, takže po jeho stisku se  $18,43^\circ$  změní na  $18^\circ 26' 5,82''$ , takže zaokrouhleně to je  $18^\circ 26'$ .

## 23.9 2018J\_19, kolmé vektory

### VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 19

Umístěním vektoru  $\vec{u}$  je orientovaná úsečka, jejíž počáteční i koncový bod leží v mřížovém bodě.  
Vektor  $\vec{v} = (x; 10)$  je k vektoru  $\vec{u}$  kolmý.



(CZV)

2 body

19 Jaká je souřadnice  $x$  vektoru  $\vec{v}$ ?

- A) -15
- B) -12
- C) -9
- D) -8
- E) Vektor  $\vec{v} = (x; 10)$  nemůže být nikdy kolmý k vektoru  $\vec{u}$ .

Jaká je souřadnice  $x$  vektoru  $\vec{v}$  ?

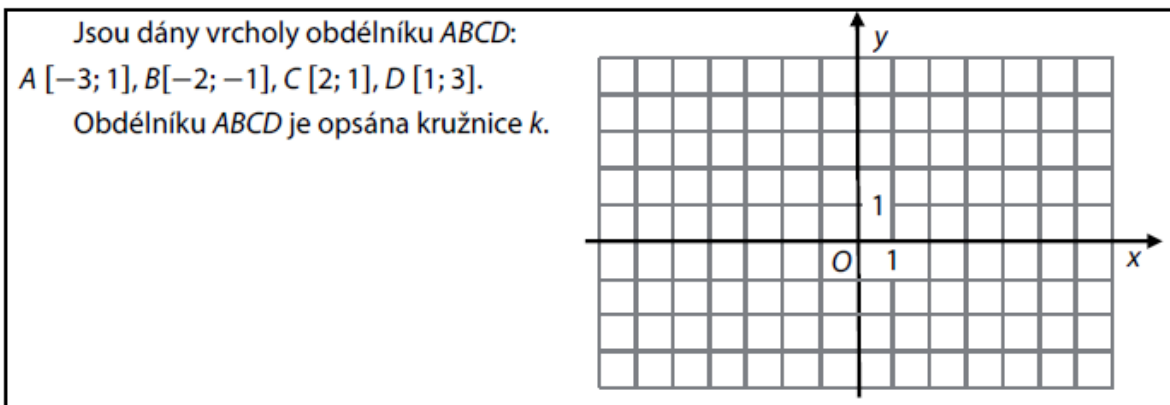
Řešení.

Využijeme vzorec pro kolmost dvou vektorů. Podmínkou kolmosti dvou vektorů  $\vec{u} = (u_1, u_2)$  a  $\vec{v} = (v_1, v_2)$  je nulový skalární součin  $\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1v_1 + u_2v_2 = 0$ . V našem případě  $\vec{u} = (u_1, u_2) = [-5; 0] - [-1; 6] = (-4; -6)$  a  $\vec{v} = (v_1, v_2) = (x; 10)$ . Skalární součin je

$(-4)x + (-6) \cdot 10 = 0$ , tj.  $x = -15$ . Řešení je (A)

## 23.10 2018J\_20, obsah kruhu

VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 20



(CZW)

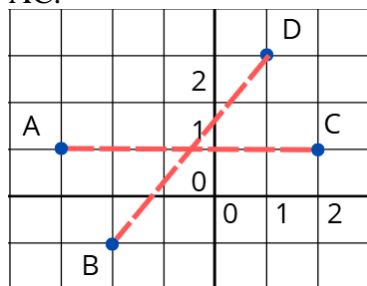
2 body

20 Jaký je obsah kruhu ohraničeného kružnicí  $k$ ?

- A)  $25\pi$
- B)  $\frac{94}{5}\pi$
- C)  $\frac{25}{2}\pi$
- D)  $5\pi$
- E)  $\frac{25}{4}\pi$

Řešení.

Do mřížky zakreslíme body a ihned vidíme, že střed kružnice opsané leží ve středu úhlopříčky AC.

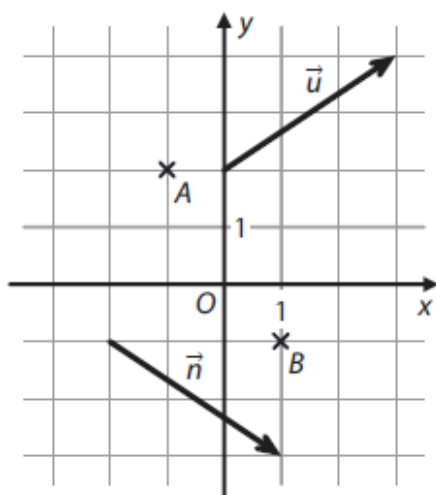


Obr.: [VK]

AC má délku 5. Poloměr je tedy  $\frac{5}{2}$  a obsah kružnice s poloměrem  $\frac{5}{2}$  je  $S = \pi \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{25}{4}\pi$ . Řešení je (E)

## 23.11 2020J\_26, normálový a směrový vektor

V mřížových bodech čtvercové sítě leží body  $A, B$  a počáteční i koncové body orientovaných úseček, které představují umístění vektorů  $\vec{u}, \vec{n}$ .



**26** Přiřadte ke každé přímce (26.1–26.3) její obecnou rovnici (A–E).

26.1 přímka  $p$  určená bodem  $A$  a normálovým vektorem  $\vec{n}$  \_\_\_\_\_

26.2 přímka  $q$  určená bodem  $A$  a směrovým vektorem  $\vec{u}$  \_\_\_\_\_

26.3 přímka  $r$  procházející body  $A, B$  \_\_\_\_\_

A)  $3x - 2y + 7 = 0$

B)  $3x + 2y - 1 = 0$

C)  $2x + 3y - 4 = 0$

D)  $2x - 3y - 5 = 0$

E)  $2x - 3y + 8 = 0$

Řešení.

Mohli bychom konstruovat rovnice přímek  $p, q, r$ , ale neuděláme to, protože máme na výběr možnosti. Využijeme všechny informace z obrázku. Všechny přímky  $p, q, r$  mají procházet bodem  $A[-1;2]$ ,

tak ho dosadíme do 5 možností: D neprojde. Vezměme přímku  $q$  – ta má vyjít z bodu  $A$  ve směru vektoru  $\vec{u} = (u_1, u_2) = (3; 2)$ , takže se dostaneme do bodu  $A + \vec{u} = [2; 4]$ . Takže bod  $[2; 4]$  leží na přímce  $q$  a musí splňovat některou z variant ABCE. Dosadíme do nich: A nevyjde, B nevyjde, C nevyjde, E vyjde. Přímka  $q$  je tedy (E). Zbývají varianty ABC. Pak máme přímku  $r$  – ta má procházet bodem  $B[1;-1]$ . Dosadíme ho do možností ABC: A neprojde, B projde, C neprojde. Tak přímka  $r$  je (B) a zbývají varianty AC pro přímku  $p$ . Nyní použijeme vzoreček pro kolmé přímky – jejich směrnice  $k_1, k_2$ , splňují vztah  $k_1 \cdot k_2 = -1$ .

Přímka  $p$  je kolmá na normálový vektor  $\vec{n}$ , a ten určuje přímku která má podle obrázku směrnici  $\frac{-2}{3}$ . Proto na ní kolmá přímka má směrnici  $\frac{-1}{\frac{-2}{3}} = \frac{3}{2}$ . Která z přímek A,C má

směrnici  $\frac{3}{2}$ ? Úpravou (C) dostaneme  $3x + 2y - 1 = 0$ , tj.  $2y = -3x + 1$  a  $y = \frac{-3}{2}x + \frac{1}{2}$ ,

tedy (C) nevyhovuje. Zbývá už jen (A), ale zkontrolujeme to. Máme  $3x - 2y + 7 = 0$ ,

tj.  $3x - 7 = 2y$  a  $y = \frac{3}{2}x - \frac{7}{2}$ , tedy přímka  $p$  je (A). Na první pohled se příklad nezdá

složitý, ale měli jsme odhadnout, že tři přímky budou časově náročné a příklad jsme měli v první fázi přeskočit. Řešení je **AEB**.

## 23.12 2021J\_07, čtverec a kolmé úhlopříčky

Máme úlohu bez mřížky a bez nákresu:

**7** Čtverec  $ABCD$  má vrchol  $A[2; -2]$  a střed  $S[3; 0]$ .

**7.1** Zapište souřadnice vrcholu  $C$  čtverce  $ABCD$ .

**7.2** Zapište obecnou rovnici přímky  $BD$ .

Řešení.

Evidentně máme vypočítat souřadnice a rovnici ze zadaných údajů. Použijeme jen logické myšlení. Čtverec má úhlopříčku  $AC$ . Známe bod  $A$  a střed této úsečky, takže zapišeme rovnici pro střed a pro bod  $C = [C_x, C_y]$ :

$$S = \frac{A+C}{2} = \frac{[2; -2] + [C_x; C_y]}{2}, \text{ přitom máme } S = [3; 0], \text{ takže } [3; 0] = \left[ \frac{2+C_x}{2}; \frac{-2+C_y}{2} \right], \text{ a odtud } \frac{2+C_x}{2} = 3, \frac{-2+C_y}{2} = 0, \text{ což dává } C_x = 4, C_y = 2, \text{ tj. } \mathbf{C = [4; 2]}.$$

Přímka  $BD$  je samozřejmě druhá úhlopříčka čtverce  $ABCD$ , kolmá na úhlopříčku  $AC$  a prochází bodem  $S$ . Můžeme ji zapsat jako  $y = k_1x + q$  a využít faktu, že je kolmá na  $AC$  a prochází bodem  $S$ . Víme, že kolmé přímky mají směrnice, jejichž součin je  $-1$ . Vypočteme proto směrnici přímky  $AC$ :  $k_2 = \frac{C_y - A_y}{C_x - A_x} = \frac{2 - (-2)}{4 - 2} = 2$ . Proto  $k_1 = -\frac{1}{2}$ . Zbývá do rovnice přímky  $y = k_1x + q = -\frac{1}{2}x + q$  dosadit bod  $S$ , kterým prochází:  $0 = -\frac{1}{2} \cdot 3 + q$ , odkud  $q = \frac{3}{2}$ . Přímka  $BD$  má proto rovnici  $y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$ . Jenže úloha zněla zapište obecnou rovnici přímky  $BD$ , tak ji musíme převést na tvar  $\mathbf{x + 2y - 3 = 0}$ . Musíme poznamenat, že během výpočtu takto „naslepo“ jsme udělali neuvěřitelné tři chyby. To je špatné. Kdybychom si situaci nakreslili, nejen že bychom chyby neudělali, ale řešení by bylo 10krát rychlejší. Na obrázku ihned sestrojíme bod  $C$  a bod  $B$  a přímku  $BD$ . Směrnice i posun přímky je přímo vidět z obrázku  $y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$ . Obecný tvar přímky je  $\mathbf{x + 2y - 3 = 0}$ . Řešení bylo rychlé a hlavně bez chyby, protože obrázek nás vede.

### 23.13 2024P\_18, výška a těžnice v trojúhelníku

#### VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 18

V kartézské souřadnicové soustavě jsou dány body  $A[5; 2]$ ,  $B[1; 5]$  a  $C[-2; 1]$ .  
Tyto body tvoří trojúhelník  $ABC$ .

max. 4 body

18.1 Jaká je velikost výšky  $v_c$  (výška na stranu  $c$ )?

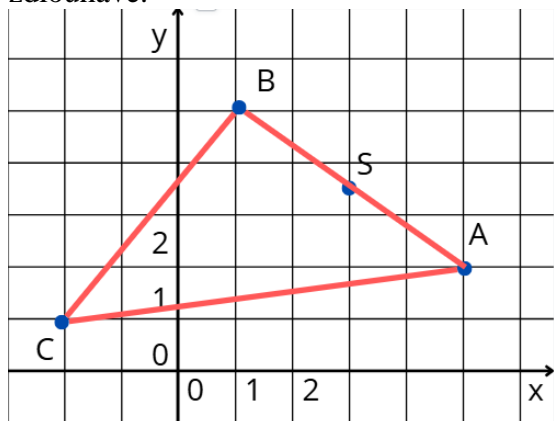
- A) 5
- B)  $\frac{5\sqrt{2}}{2}$
- C)  $5\sqrt{2}$
- D)  $\sqrt{5}$
- E) jiný výsledek

18.2 Jaká je velikost těžnice  $t_c$  (těžnice na stranu  $c$ )?

- A)  $\frac{5\sqrt{2}}{2}$
- B)  $5\sqrt{2}$
- C)  $\frac{5\sqrt{5}}{2}$
- D)  $5\sqrt{5}$
- E) jiný výsledek

Řešení.

Tuto úlohu se mnohokrát vyplatí si nakreslit, protože bez toho by řešení bylo imaginární a zdlouhavé.



Obr.: [VK]

Z nákresu totiž ihned vidíme, že trojúhelník ABC má pravý úhel v bodě B, a proto výška na stranu c je právě strana BC. Velikost vypočteme podle Pythagorovy věty nebo (což je totéž) podle vzorce z tabulek:

Vzdálenost bodů B[1;5] a C[-2;1] je

$$|BC| = \sqrt{(x_B - x_C)^2 + (y_B - y_C)^2} = \sqrt{(1 + 2)^2 + (5 - 1)^2} = \sqrt{25} = 5$$

Těžnice je spojnice bodu C se středem S úsečky AB. Vypočteme střed S:

$$S = \frac{A + B}{2} = \frac{[5; 2] + [1; 5]}{2}, \quad S = \left[3; \frac{7}{2}\right],$$

a vzdálenost bodů C[-2;1] a S[3;  $\frac{7}{2}$ ] je

$$|CS| = \sqrt{(-2 - 3)^2 + \left(1 - \frac{7}{2}\right)^2} = \sqrt{25 + \left(\frac{-5}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{100+25}{4}} = \sqrt{\frac{5 \cdot 25}{4}} = \frac{5\sqrt{5}}{2}, \text{ což je výsledek.}$$

Řešení je **A,C**.

## 23.14 2025P\_18, poloha dvou přímek

V kartézské soustavě souřadnic Oxy jsou dány přímky  $p, q$ .

$$p: x = 3t,$$

$$y = 1 - t, \quad t \in \mathbb{R}$$

$$q: x + 3y - 6 = 0$$

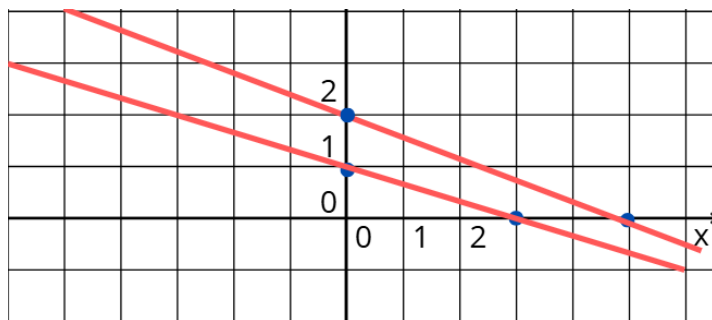
Které z následujících tvrzení je pravdivé?

- A) Přímka  $q$  je kolmá k přímce  $p$ .
- B) Přímky  $p, q$  nejsou rovnoběžné.
- C) Vzdálenost přímek  $p, q$  je 3.
- D) Přímky  $p, q$  mají alespoň dva společné body.
- E) Žádné z předchozích tvrzení (A–D) není pravdivé.

Řešení.

Začneme nákresem přímky  $p$ . Zvolíme si hodnotu parametru  $t=0$  a vypočteme bod na přímce:  $x=0, y=1$ , tj.  $[0;1]$ . Zvolíme druhou hodnotu parametru  $t=1$  a vypočteme  $x=3, y=0$ , tj. máme druhý bod  $[3;0]$ . Proložíme jimi přímku, viz obr.

U přímky  $q$  také zvolíme dva body. První bod zvolíme  $x=0$ , vypočteme  $y=2$ , tj. máme bod  $[0;2]$ . U druhého bodu zvolíme  $x=6$  a vypočteme  $y=0$ , tj. máme bod  $[6;0]$ . Oba body spojíme a máme přímku  $q$ .



Obr.: [VK]

Z obrázku vidíme, že přímky jsou různoběžné, takže řešením je (E). Bez náčrtu bychom úlohu řešili rozhodně pomaleji.

## 24 GONIOMETRICKÉ FUNKCE

### 24.1 2014J\_07

7 Je dána funkce  $g: y = \sin x$ ,  $x \in \langle 0^\circ; 360^\circ \rangle$ .

Určete ve stupních hodnotu proměnné  $x$ , v níž funkce  $g$  nabývá minima.

Řešení.

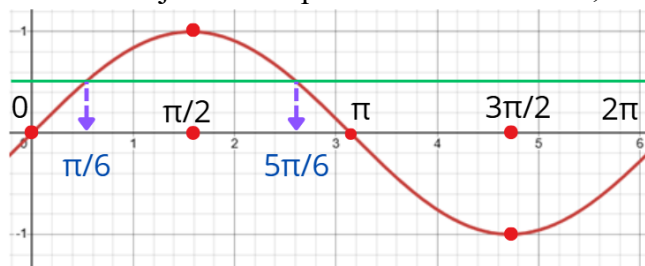
Nakreslíme si graf funkce sinus a z něho okamžitě vidíme, že minimum je  $-1$  a nabývá se v bodě  $x = 270^\circ$ .

### 24.2 2015J\_16

16 Rozhodněte u každé z následujících rovnic (16.1–16.4), zda má pro  $x \in \langle 0; 2\pi \rangle$  právě dvě řešení (A), či nikoli (N).

	A	N
16.1 $\sin x = \frac{1}{2}$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
16.2 $\sin x = \frac{3}{2}$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
16.3 $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
16.4 $\sin x = -1$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

Řešení. Je to škrtačí úloha, takže podle STRATEGIE je zaměřena na pozornost. Opravdu, oni se ptají která z rovnic má právě dvě řešení. Nikoli jaká řešení, ale *kolik*. A pozor, mají být právě dvě, a to v intervalu  $x \in \langle 0; 2\pi \rangle$ . Takže si nakreslíme funkci  $\sin x$  a přímo na grafu v intervalu  $\langle 0; 2\pi \rangle$  najdeme řešení. Jak vidíte, jedná se o dva základní trojúhelníky a jejich úhly. Úlohu 16.1 jsme řešili přímo v učebním textu, kde je tento obrázek:



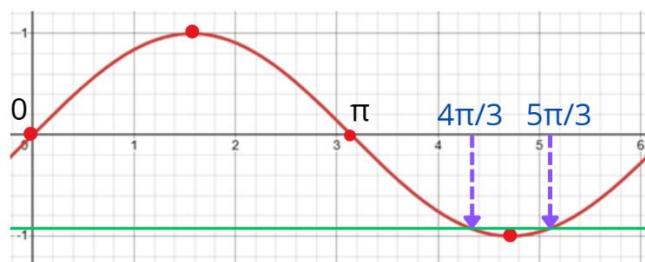
Obr.: [VK]

Z něho je patrné, že řešení jsou právě dvě, a to  $\pi/6$  a  $5\pi/6$  (tj.  $30^\circ$  a  $150^\circ$ ). **16.1 = ANO**.

Úloha 16.2 je chyták. Sinus nabývá vždy jen hodnoty od  $-1$  do  $+1$ , takže nikdy se neprotne s přímkou  $y = \frac{3}{2}$ , tj. **16.2 = NE**. Úlohu 16.3 bychom řešili jako 16.1. Zkusíme na kalkulačce

zadat SHIFT SIN  $(-\frac{\sqrt{3}}{2})$  a dostaneme  $-60^\circ$ . Přičtením periody  $360^\circ$  dostaneme  $300^\circ$

( $=5\pi/3$ ), což je jedno řešení. Z grafu vidíme, že přímka  $y = -\frac{\sqrt{3}}{2}$  protne graf  $\sin(x)$  v intervalu  $\langle 0; 2\pi \rangle$  ve dvou bodech, takže **16.3 = ANO**. Řešení nemusíme vypočítávat, ale díky symetrii grafu máme i druhé řešení  $240^\circ$  ( $=4\pi/3$ ). Z obrázku je vidět, že **16.4 = NE**.



Obr.: [VK]

Poznámka. Chvilí mi trvalo, než jsem uměl zadat SHIFT SIN  $(-\frac{\sqrt{3}}{2})$ , protože jsem sice napsal odmocnina ze tří, ale „děleno 2“ mi stále zůstávalo pod odmocninou. UI mi pomohla, musí se použít kurzor doprava, aby se z té odmocniny „vyskočilo“. Z toho vyplývá, že je nutné se s kalkulačkou dopředu seznámit.

### 24.3 2017J\_25

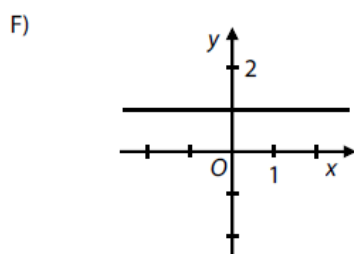
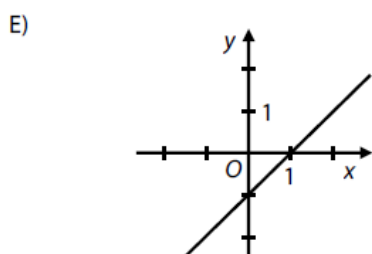
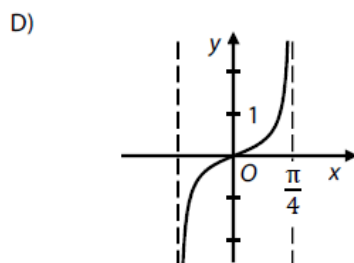
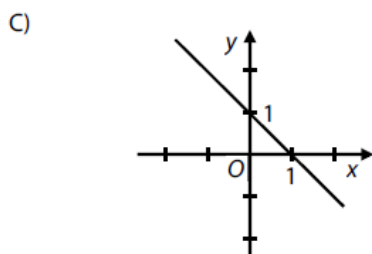
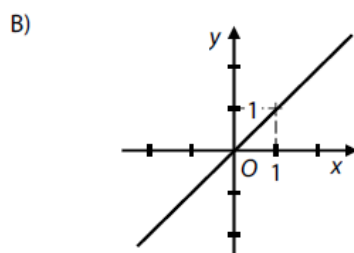
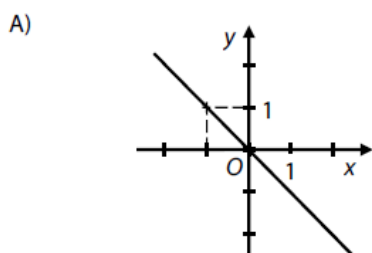
**25** Přiřadte ke každému předpisu funkce (25.1–25.4) odpovídající graf funkce (A–F).

25.1  $y = \text{tg} \frac{\pi}{4}$  \_\_\_\_\_

25.2  $y = x \cdot \text{tg} \frac{3\pi}{4}$  \_\_\_\_\_

25.3  $y = x \cdot \text{tg} \frac{5\pi}{4}$  \_\_\_\_\_

25.4  $y = x + \text{tg} \frac{7\pi}{4}$  \_\_\_\_\_



Řešení.

Je to škrtačí úloha, takže podle STRATEGIE je zaměřena na **pozornost!** Klíčovým okamžikem je uvědomit si, že hodnoty  $\operatorname{tg}(\frac{\pi}{4}), \operatorname{tg}(\frac{3\pi}{4}), \operatorname{tg}(\frac{5\pi}{4}), \operatorname{tg}(\frac{7\pi}{4})$  nejsou funkce, ale jsou to hodnoty, prostě nějaká čísla. Když to nevidíte, vypočítejte je na kalkulačce. Pozor na to, že na kalkulačce máte většinou nastaveny stupně, takže musíte nejprve hodnoty

$\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$  převést na stupně: 45, 135, 225, 315 a pak od nich spočítat tangens: 1, -1, 1, -1.

Teď ty původní možnosti vypadají jinak:

25.1:  $y = 1$

25.2:  $y = x \cdot (-1)$

25.3:  $y = x \cdot 1$

25.4:  $y = x + (-1)$

a snadno k nim přiřadíte odpovědi: **F, A, B, E.**

## 24.4 2017P\_13

**13** Řešte rovnici s neznámou  $x \in \langle 0^\circ; 360^\circ \rangle$ :

$$\operatorname{tg} x = -1$$

Řešení.

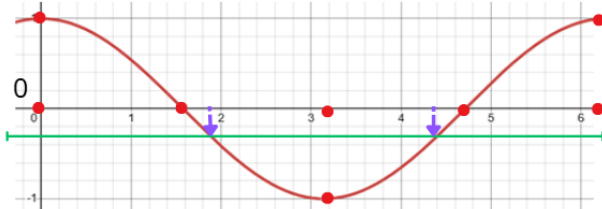
Vzpomeňte si na graf a periodu funkce tangens nebo to nalistujte v tabulkách. Automaticky uvidíte první řešení  $x=135^\circ$ , a protože perioda je  $180^\circ$ , další řešení je  $315^\circ$ . To jsou všechna řešení, protože chtějí jen hodnoty v intervalu  $\langle 0^\circ; 360^\circ \rangle$ . Mohli bychom napsat  $\underline{K=\{135^\circ, 315^\circ\}}$ .

## 24.5 2019J\_11

**11** Pro dva různé úhly  $\alpha = 112^\circ$ ,  $\beta \in \langle 0^\circ; 360^\circ \rangle$  platí  $\cos \alpha = \cos \beta$ .  
Určete ve stupních velikost úhlu  $\beta$ .

Řešení.

Vzpomeňte si na graf a periodu funkce kosinus nebo to nalistujte v tabulkách.

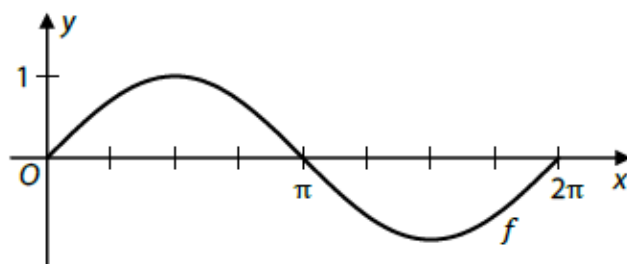


Obr.: [VK]

Nejdříve na kalkulačce zjistíme  $\cos \alpha = \cos 112^\circ \doteq -0,375$ . Tuhle hodnotu reprezentuje na obrázku zelená čára. První úhel  $\alpha = 112^\circ$ , jehož kosinus nabývá hodnoty  $-0,375$  je vidět za  $90^\circ$ . Druhý úhel  $\beta$ , jehož kosinus nabývá hodnoty  $-0,375$  je symetrický s  $\alpha$  vzhledem ke středu  $180^\circ$ , což znamená, že  $180^\circ - \alpha = \beta - 180^\circ$ , tj.  $\beta = 360^\circ - \alpha = 248^\circ$ . To jsou všechna řešení, protože chtějí jen hodnoty v intervalu  $\langle 0^\circ; 360^\circ \rangle$ . Mohli bychom napsat  $\beta = 248^\circ$  nebo  $K = \{248^\circ\}$ .

## 24.6 2021J\_11

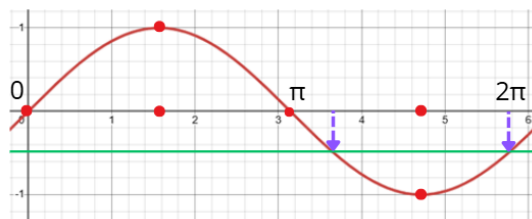
V kartézské soustavě souřadnic  $Oxy$  je sestaven graf funkce  $f: y = \sin x$  pro  $x \in \langle 0; 2\pi \rangle$ .



**11** Vypočítejte všechny hodnoty proměnné  $x \in \langle 0; 2\pi \rangle$ , pro něž je  $f(x) = -0,5$ .

Řešení.

Vzpomeňte si na graf a periodu funkce sinus nebo to nalistujte v tabulkách.



Obr.: [VK]

Nejdříve na kalkulačce zjistíme úhel  $x$ , pro něž je  $\sin(x) = -0,5$ . SHIFT SIN (-1:2) dává hodnotu  $-30$ , tj.  $-30^\circ$ , tedy  $360^\circ - 30^\circ = 330^\circ$ . Protože výsledek má být v radiánech, je to  $2\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{11\pi}{6}$ . Ze symetrie funkce sinus (viz obr. výše) vypočítáme druhý úhel  $\pi + \frac{\pi}{6} = \frac{7\pi}{6}$ .

To jsou všechna řešení, protože chtějí jen hodnoty v intervalu  $(0; 2\pi)$ . Mohli bychom napsat

$$x_1 = \frac{7\pi}{6}, x_2 = \frac{11\pi}{6}; \text{ nebo } K = \left\{ \frac{7\pi}{6}; \frac{11\pi}{6} \right\}.$$

---

---

## 25 Literatura

[CZVV] Centrum pro zjišťování výsledků vzdělávání – Cermat, maturitní úlohy z matematiky z let 2014–jaro 2026, ilustrační testy Cermatu, katalogy požadavků k maturitě z matematiky, souborů a katalogů vzorových úloh, ilustračních testů, mimořádných testů, řešení příkladů a další materiály Cermatu

[Tabulky] Mikulčák J., Charvát J., Macháček M., Zemánek F.: Matematické, fyzikální a chemické tabulky a vzorce pro střední školy, Prometheus, 2025

[VK] Několik obrázků, které nakreslil autor textu, zejména pomocí programů

<https://www.geogebra.org/> a <https://www.desmos.com/calculator>