

Nejmenší možný souhrn znalostí pro maturitu z matematiky

RNDr. Vlastimil Klíma

na základě úplného souboru maturitních úloh z let 2014 - jaro 2026,
ver. 1.3

Příloha 1: **Řešené příklady** (pro všechny kapitoly)

Příloha 2: **Všechny příklady** ze všech maturit, ilustračních testů a vzorových úloh Cermatu,

Příloha 3: **KLÍČ** (řešení všech úloh z přílohy 2, pro všechny kapitoly)

Tento text vznikl tak, že jsme vzali všech 822 dostupných maturitních úloh z matematiky a vzorových maturitních příkladů Cermatu od roku 2014 do jara 2026 a rozdělili jsme je do tematických celků. V každém celku **jsme vybrali všechny znalosti, které jsou potřeba k řešení a uvedli je zde** v této brožuře. **Nejsou zde žádné znalosti navíc!** V odstavci STRATEGIE jsou rady, které byly těžce nabyté při testování studentů.

Přehled témat

Kapitola	Téma maturitních úloh	
3	ALGEBRAICKÉ VÝRAZY	70
4	KVADRATICKÉ ROVNICE	30
5	KVADRATICKÉ NEROVNICE	22
6	ČÍSELNÉ MNOŽINY	33
7	VYJADŘOVÁNÍ NEZNÁMÉ ZE VZORCE	9
8	LINEÁRNÍ ROVNICE	21
	PROCENTA	21
	ZLOMKY	4
9	LINEÁRNÍ NEROVNICE	15
10	POSLOUPNOSTI	58
11	FINANČNÍ MATEMATIKA	12
12	KOMBINATORIKA	49
13	PRAVDĚPODOBNOST A STATISTIKA	32
14	SLOVNÍ ÚLOHY	71
15	PLANIMETRIE: N-ÚHELNÍKY	58
16	PLANIMETRIE: PLOCHY	51
17	STEREOMETRIE	76
18	NIC	0
19	PARABOLA	19
20	HYPERBOLA	14
21	MOCNINA A EXPONENCIÁLA	32
22	LOGARITMY	29
23	ANALYTICKÁ GEOMETRIE	79
24	GONIOMETRICKÉ FUNKCE	17
	součet	822

Důležité upozornění:

Autor tohoto textu deklaruje, že tento text má nekomerční charakter, poskytuje ho bezplatně, a slouží pouze pro vyučování, vzdělávací a pedagogické účely.

Brožura i přílohy ver. 1.3 se liší od předchozích verzí drobným rozšířením a opravou chyb, proto se doporučuje používat nejnovější verzi brožury i příloh.

Obsah

1	ÚVOD – čti mne – není zde nic zbytečného	6
2	STRATEGIE – nezbytné zásady a užitečné rady	6
2.1	Postup u maturity	6
2.2	Výsledek je lepší v záznamovém archu vždy dvakrát PODTRHNOUT	7
2.3	Množina řešení se označuje K	7
2.4	PODMÍNKY, PODMÍNKY, PODMÍNKY!!!	7
2.5	Když je čas, udělejte zkoušku	7
2.6	Úlohy se záznamem do záznamového archu.....	7
2.7	Škrtačí úlohy.....	7
2.8	Tabulky	8
2.9	Kalkulačka.....	8
2.10	Didaktické testy, záznamové archy a řešení úloh.....	8
3	ALGEBRAICKÉ VÝRAZY	8
4	KVADRATICKÉ ROVNICE	9
4.1	Návody a rady	9
4.2	Jak nalézt celočíselné kořeny nebo roznásobit kvadratický trojčlen (Vietovy vzorce) 10	
5	KVADRATICKÉ NEROVNICE	10
5.1	Tipy.....	11
5.2	Triky.....	11
5.3	Úpravy.....	11
5.4	Grafické řešení	12
5.5	Nulové body	14
5.6	Řešení nerovnic nulovými body	16
6	ČÍSELNÉ MNOŽINY	17
7	VYJADŘOVÁNÍ NEZNÁMÉ ZE VZORCE	18
8	LINEÁRNÍ ROVNICE, PROCENTA, ZLOMKY, PŘEVODY	18
8.1	Příklad. Zlevnění a zdražení (2024J_02, [CZVV]).....	19
8.2	Příklad. Dvojitě zlevnění (2017J_11, [CZVV]).....	19
8.3	Příklad. Měřítko mapy (2024P_16, [CZVV])	20
9	LINEÁRNÍ NEROVNICE	20
10	POSLOUPNOSTI – obecná, aritmetická a geometrická	21
10.1	Obecná posloupnost	21

10.2	Aritmetická posloupnost.....	22
10.3	Geometrická posloupnost.....	22
11	FINANČNÍ MATEMATIKA	23
11.1	Složené úročení u bank.....	23
11.2	Dluhy, hypotéky, úvěry, odpisy majetku	24
12	KOMBINATORIKA.....	24
12.1	Faktoriál.....	24
12.2	Permutace	24
12.3	Kombinační číslo.....	25
12.4	Souhrn.....	26
12.5	Počítání s kombinačními čísly.....	26
12.6	Trik.....	26
12.7	Pravděpodobnost.....	27
12.8	Kombinatorické úlohy	27
13	PRAVDĚPODOBNOST A STATISTIKA	28
13.1	Pojmy Modus, Medián a Průměr	28
13.2	Škrtačí úlohy v didaktickém testu z matematiky a možnost získat 5 bodů náhodným zaškrtačováním	28
14	SLOVNÍ ÚLOHY	31
14.1	Dvě rady, jak řešit slovní úlohy	31
15	PLANIMETRIE – N-úhelníky (výpočty stran a úhlů).....	31
15.1	Sinus, kosinus a tangens	32
15.2	Dva základní trojúhelníky.....	33
15.3	Věta sinová a kosinová ([Tabulky]).....	33
15.4	Pythagorova věta ([Tabulky]).....	34
15.5	Thaletova věta ([Tabulky]).....	34
16	PLANIMETRIE – PLOCHY	34
17	STEREOMETRIE.....	34
17.1	Několik rad	34
17.2	Přehled vzorců ([Tabulky]).....	35
18	GRAFY RŮZNÝCH FUNKCÍ	36
18.1	Úvod	36
18.2	Funkce, graf funkce	36
18.3	Definiční obor funkce (D_f).....	36
18.4	Obor hodnot funkce (H_f)	37
18.5	Jaké se objevují grafy v úlohách?.....	37
19	PARABOLA	38

19.1	Definice paraboly, vrchol, zúžení a protažení a další její vlastnosti.....	38
19.2	Kořeny a rozklad na kořenové činitele paraboly	40
19.3	Kořenový zápis paraboly.....	40
19.4	Vrcholový tvar paraboly	42
19.5	Příklady parabol z maturit.....	43
19.6	Příklad z maturity, který dělá potíže	43
19.7	Příklad, kdy známe kořeny paraboly.....	44
19.8	Příklad, kdy známe vrchol	44
19.9	Příklad, kdy známe kořeny i vrchol	45
20	HYPERBOLA.....	45
20.1	Nejčastější vzorec hyperboly.....	45
20.2	Varianty hyperbol s posunutím středu hyperboly	46
20.3	Hyperbola jako lineární lomená funkce.....	47
21	MOCNINA A EXPONENCIÁLA	47
21.1	Nejčastější vzorec exponenciální funkce	47
21.2	Tři pravidla, jak řešit úlohy s mocninami (exponenty)	48
22	LOGARITMY	49
22.1	Úvod – tohle je nutné se naučit	49
22.2	Definice logaritmu.....	49
22.3	Příklady $\log_{10}(x)$	50
22.4	Příklady $\log_2(x)$	51
22.5	Definice logaritmu o základu e („přirozený logaritmus“).....	52
22.6	Super rada	52
22.7	Příklady.....	52
23	ANALYTICKÁ GEOMETRIE.....	53
23.1	Kartézská soustava souřadnic a body	53
23.2	Vektory.....	54
23.3	Úhel mezi dvěma vektory	55
23.4	Přímky.....	56
23.4.1	Obecný tvar přímky, směrový a normálový vektor	56
23.4.2	Nejpoužívanější a nejdůležitější věta o přímce.....	57
23.4.3	Směrnice tvar přímky, tj. směrnice a posun	57
23.4.4	Parametrický tvar přímky	59
23.4.5	Odchylka je ostrý úhel mezi dvěma přímkami	60
23.5	Jen tři rady na závěr.....	60
24	GONIOMETRICKÉ FUNKCE.....	60
24.1	Úvod	60
24.2	Jak se definuje \sin , \cos a tg	61
24.3	Dva základních trojúhelníky.....	61

24.4	Rozdíl mezi stupni a radiány.....	62
24.5	Grafy sin, cos, tg a jejich periody	63
24.6	Funkce sinus	63
24.7	Funkce kosinus	64
24.8	Funkce tangens.....	65
24.9	Příklady.....	66
25	Literatura	66

1 ÚVOD – čti mne – není zde nic zbytečného

Není zde nic zbytečného, nic navíc, všechno se použije u maturity. Všechny potřebné pojmy jsou vysvětlené zde, jednoduše, ale správně. Existuje 10-15 témat maturitních úloh, ke každému je tady seznam znalostí z příkladů, které se skutečně použily v maturitních úlohách. Středoškolské učivo je mnohem obsáhlejší, ale **toto není středoškolské učivo, toto je výtah z něho, který se používá u maturit, a který stačí pro maturitu**. Výjimkou je kapitola "Strategie", která je návodem, jak u maturity postupovat, protože to sami nevymyslíte.

Zjistili jsme (a v kapitole pravděpodobnost a statistika je to spočítáno), že je možné dělat jen prvních 15 z 24-26 úloh z didaktického testu Cermatu. Ve zbylých úlohách můžete správné odpovědi zaškrtnat náhodně. **V průměru získáte zadarmo neuvěřitelných 5,4 bodu.** To není ani málo, ani mnoho. Udělali jsme několik reálných testů se studenty. Pár jich získalo 9 bodů, mnohem méněkrát žádný bod, občas něco mezi, ale v průměru je to zcela přesně spočítáno na 5,4 bodu. I s tím minimem znalostí, které vám tahle brožura poskytne v kapitole Pravděpodobnost a Statistika, to můžete spočítat sami. Když to risknete, zbyde vám spousta času na prvních 15 úloh.

Je to na vás, "Strategie" jsou fakta, která jsem zjistil, a která se vyplatí si přečíst.

Pokud se budete chtít učit na příkladech, vysvětlení řešení vždy několika typových příkladů je pro každé téma uvedeno v Příloze 1.

Poznámka.

Značení v této brožuře je toto: důležité věci jsou **tučně**, potom **tučně podtržené**, potom ještě **žlutě zvýrazněné** a nejvýznamnější věci **zeleně zvýrazněné**.

2 STRATEGIE – nezbytné zásady a užitečné rady

2.1 Postup u maturity

Za prvé: Nejprve rychle přelétněte text, abyste zjistili, kolik úloh a za kolik bodů určitě uděláte. Pak jděte na ně. Až skončíme, spočítáme body, pokud je to hodně, zvážíme, jestli dělat zkoušky u těch úloh nebo jít na další.

Za druhé: Projedeme celý test a děláme úlohy s krátkým zadáním. Pak úlohy s dlouhým zadáním.

Za třetí: Děláme i úlohy „škrtačí“. Jsou to úlohy, kde "zaškrtaváme" správnou odpověď. Pozor! Tyto úlohy jsou většinou jednodušší než jiné, ale často mají záměrně matoucí zadání nebo řešení. Úlohy „škrtačí“, které neumíme, zaškrtneme náhodně. Můžeme tím získat zadarmo v průměru 5 bodů.

Další pravidla a zásady:

Při zápisu výpočtu postupujeme pomalu, krok za krokem. **Nikdy neděláme dvě úpravy najednou!** I ti nejlepší dělají zcela pravidelně numerické chyby. Pokud v příkladu nevyjde "hezké" řešení, je tam téměř jistě chyba. Jednoduché úpravy nám umožní příklad rychle zkontrolovat! Nikdy nedělejte najednou roznásobení a mínus před závorkou!

2.2 Výsledek je lepší v záznamovém archu vždy dvakrát **PODTRHNOUT**

Výsledek je lepší v záznamovém archu vždy dvakrát podtrhnout. Proč? Aby bylo poznat, co v té změti výpočtů a škrtnanců je výsledek. Pokud něco zkazíte, tak jasně přeškrtnout nebo začárat, a tím to už neexistuje. Navíc, když výsledek dvakrát podtrhnete, nic nezkažete. Dále, pokud se na něco ptají, vždy odpovězte pokud možno "celou (nebo částečnou) větou", například je otázka o kolik procent se něco zvýší. Ve vzorovém výsledku Cermatu je "o 5 %". Jestli stačí jen odpověď "5 %" nebo dokonce "5" nikdo neví. Stejně tak není jasné, kdy zapisovat řešení jako množinu K. Zdá se, že vždy je to možné, ale opět to nikde není napsáno.

2.3 Množina řešení se označuje K

Cermat rád zapisuje řešení jako množinu K. Například když má kvadratická rovnice dvě řešení, můžete napsat klasicky

$$x_{1,2} = \pm \frac{5}{2} \quad \text{nebo} \quad K = \left\{ -\frac{5}{2}; +\frac{5}{2} \right\}.$$

Řešení nerovnice můžete napsat jako

$$\underline{x \in (-\infty; 5) \cup (6; \infty) \text{ nebo } K = (-\infty; 5) \cup (6; \infty)}.$$

Když je více řešení, můžete napsat

$$\underline{x \in \{-2; -1; 5; +21\} \text{ nebo } K = \{-2; -1; 5; +21\}}.$$

Když řešení neexistuje, tak se píše

řešení neexistuje nebo $K = \emptyset$.

2.4 **PODMÍNKY, PODMÍNKY, PODMÍNKY!!!**

Jakmile podtrhnete výsledek, musíte za každou cenu udělat **PODMÍNKY**. Když je neuděláte, většinou přijdete o jeden bod. Co to jsou podmínky: musíte napsat například $x \neq 0$, $x \neq 5$ (a dvakrát podtrhnout), pokud by se dělilo ve zlomku proměnnou x a $x - 5$.

- **dělení nulou** u zlomku
- **odmocnina** – pod odmocninou nesmí být záporné číslo, musí být číslo ≥ 0
- **logaritmus** ($\log_a x$) musí mít kladný základ i argument ($a > 0$, $x > 0$)

Takže hned pod výsledek napište, čemu se nesmí rovnat příslušná proměnná, a také to dvakrát podtrhněte. Je to totiž součást řešení!!! Za ten bod to stojí.

2.5 Když je čas, udělejte zkoušku

U úloh, kde nepíšete postup do záznamového archu, je výsledek jediné, co se hodnotí.

Nezachrání vás postup řešení, ten není. **Ukazuje se, že čas, věnovaný zkoušce nebo kontrole řešení je EFEKTIVNĚJŠÍ, než řešení dalších úloh.** Numerické chyby jsou totiž ve stresu téměř pravidlem, nestačí umět postup. **KONTROLA VÝSLEDKU JE NAPROSTO NEZBYTNÁ.**

2.6 Úlohy se záznamem do záznamového archu

Zvláštní pozornost věnovat úlohám se záznamem do záznamového archu. (Někdy) Je lepší si úlohu vypočítat mimo a teprve **po zkoušce** (je-li čas) přepsat řešení do archu. Výhoda je, že opisujete jen čisté řešení.

2.7 Škrtačí úlohy

Jak bylo řečeno výše, když se dostaneme až ke škrtačím úlohám (většinou úlohy 16-26 na konci testu), **pokusíme se je řešit**. Jsou zaměřeny na **pozornost**, nikoli na obtížnost. Třeba, že

můžete krátit nějaký zlomek v algebraickém výrazu nebo že řešení, které vyjde, nemůže být řešením, protože by se dělilo nulou, apod. Ve "škrtačích úlohách" platí pravidlo, že **správná odpověď je pouze a jedině jedna** a právě jen jedna. Třeba máte možnosti A, B, C, D, E. Když A, B se vám nelíbí a C se zdá správně a už nemáte čas, nemusíte dělat ostatní možnosti.

2.8 Tabulky

Předem si je projít a zjistit, kde jsou vzorečky, které si nepamatujete.

2.9 Kalkulačka

Cermat nepublikuje seznam povolených kalkulaček. Konečné rozhodnutí dělá ředitel školy. Aktualizovaný platný seznam je na stránce <https://oaplzen.cz/matematika/maturity/>.

S kalkulačkou je nutné se seznámit předem. Vyzkoušet si tyto úlohy:

- vypočítat sin, cos, tg od nějakého úhlu ve stupních nebo v radiánech – nutno vědět, jak se to přepíná a přepnout si kalkulačku na stupně
- vypočítat arcsin, arccos, arctg od nějaké hodnoty, tedy zjistit jaký úhel dává tu hodnotu sinu, kosinu a tangens a vědět, jestli to vrací ve stupních nebo radiánech, třeba arcsin od 0,75 se dělá jako SHIFT SIN (3/4)
- vyzkoušet vložení základu (a) i hodnoty (x) logaritmu $\log_a(x)$, n-tou odmocninu a mocninu
- používat závorky, když nevíme přesně, jakou přednost operací kalkulačka používá (zkusit si pár příkladů, např. $2 + 3 \times 5 + 6$, $2 \times 6 + 3:5$, apod.)

2.10 Didaktické testy, záznamové archy a řešení úloh

Na internetu jsou uloženy všechny maturitní testy, jejich záznamové archy a výsledky řešení.

3 ALGEBRAICKÉ VÝRAZY

Čistě z tohoto tématu je 70 úloh z 822, kromě toho se úpravy algebraických výrazů vyskytují skoro ve všech úlohách z maturity. Je to naprostý základ.

Je nutno si pamatovat pouze tyto vzorce pro rozklad, mocninu a kořeny:

$$x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$$

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$ax^2 + bx + c = 0$ má kořeny

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Je-li diskriminant $D = \sqrt{b^2 - 4ac}$ záporný, pak rovnice nemá reálné kořeny.

Rady:

- Všechny úpravy dělat postupně, protože při kontrole je to rychlejší
- Z algebraických výrazů vytknout, co lze
- Vše převést na společný jmenovatel
- Dělení (:) zlomků převést na násobení
- U všech zlomků ihned dělat zápis podmínek (nedělit nulou, odmocnina jen z čísla ≥ 0)

V maturitních úlohách je vzorec pro rozklad $x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$ mnohonásobně používaný v různých variantách, nezapomeňte, že $x^2 - y^2$ může vypadat takhle:

$$\begin{aligned} x^2 - 1 &= (x + 1)(x - 1), 4a^2 - 9 = (4a + 3)(4a - 3), 9s^2 - 25 = (3s + 5)(3s - 5) \\ (2s + 5)^2 - (4x - 1)^2 &= (2s + 5 + 4x - 1)(2s + 5 - 4x + 1) \\ &= (2s + 4x + 4)(2s - 4x + 6) \end{aligned}$$

Častá je úprava

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$$

Podmínky:

$$\frac{1}{\frac{C}{D - E}} \text{ má podmínky: } D \neq E, C \neq 0, A \neq 0$$

$$A: \frac{C}{D - E}$$

$$\frac{\frac{\sqrt{F}}{C}}{D - \sqrt{E}} \text{ má podmínky: } F \geq 0, D \neq \sqrt{E}, E \geq 0, C \neq 0$$

Úpravy dělejte postupně, krok za krokem, abyste to pak mohli rychleji zkontrolovat:

$$\begin{aligned} &\left(\frac{1}{2x - y} + \frac{3y}{y^2 - 4x^2} - \frac{2}{2x + y} \right) : \left(\frac{4x^2 + y^2}{4x^2 - y^2} + 1 \right) = \\ &\left(\frac{1}{2x - y} + \frac{3y}{(y + 2x)(y - 2x)} - \frac{2}{2x + y} \right) : \left(\frac{4x^2 + y^2 + 4x^2 - y^2}{4x^2 - y^2} \right) = \\ &\left(\frac{(-1)(y + 2x) + 3y - 2(y - 2x)}{(y + 2x)(y - 2x)} \right) : \left(\frac{8x^2}{4x^2 - y^2} \right) = \\ &\left(\frac{-y - 2x + 3y - 2y + 4x}{(y + 2x)(y - 2x)} \right) : \left(\frac{8x^2}{(2x + y)(2x - y)} \right) = \\ &\left(\frac{2x}{(y + 2x)(y - 2x)} \right) \cdot \left(\frac{(y + 2x)(y - 2x)}{8x^2} \right) = \frac{2x}{8x^2} = \frac{1}{4x} \end{aligned}$$

a podmínky:

$$\begin{aligned} &2x - y \neq 0, y^2 - 4x^2 \neq 0, 2x + y \neq 0, \\ &\frac{4x^2 + y^2}{4x^2 - y^2} + 1 \neq 0, \text{ tj. } \frac{8x^2}{4x^2 - y^2} \neq 0, \text{ tj. k podmínkám výše navíc } x \neq 0, \end{aligned}$$

Celkově jsou podmínky

$$2x - y \neq 0, 2x + y \neq 0, x \neq 0$$

Upravte a zjednodušte nejprve výrazy v závorkách, nesnažte se dělat několik úprav najednou.

4 KVADRATICKÉ ROVNICE

Z tohoto tématu je 30 úloh z 822, ale můžeme připočítat klidně 100 dalších, kde se kvadratické kořeny, trojčleny a rovnice použijí. **Je to základní a zásadní téma.**

4.1 Návodů a rady

V maturitních úlohách je spousta výrazů, nejen kvadratických, které je nutno upravovat, zjednodušovat apod. Proto tyto rady:

- Převést na jednu stranu, na druhé je nula (toto pravidlo se bude hodit pro kvadratické a jiné nerovnice),
- Nejdříve vypočítat a zjednodušit to, co je uvnitř závorky: $2x^2 - 4x + 2 = 2(x^2 - 2x + 1) = 2(x + 1)^2$.
- Složené zlomky a dělení pomalu, po krocích, nikdy neroznásobovat závorky současně s mínusem před nimi, nejprve roznásobit, potom minus,
- Převést na společného jmenovatele
- Výrazy typu $x^2 + 1$, $x^4 + 7$, $y^2 + 6$, $(5s - 1)^2 + 3$, nemohou být nikdy nula, proto rovnice $x^2 + 1 = 0$ nemá řešení, $x^4 + 7 = 0$ také ne a $y^2 + 6 + (5s - 1)^2 = 0$ také ne
- Pokud se některý z výrazů výše objeví v rovnici, např.

$$(x + 1)(x^2 + 1)(x^2 - 3x - 4) = 0,$$
tak $(x^2 + 1)$ můžeme vyloučit, protože není nikdy nula
- U rovnic typu $-(x + 6)^2 + 4 = 0$ si udělat představu o grafu
- Vytknout, co se dá, převést na součin: $2x^2 - 4x + 4 = 2x(x - 2)$, $4a^2 - 9 = (4a + 3)(4a - 3)$,
- Neřešit kvadratickou rovnici ve tvaru $x^2 - 4 - 3x = 0$, ale uspořádat, abychom viděli koeficienty pro vzorec pro kořeny: $x^2 - 3x - 4 = 0$
- Uspořádat výrazy typu $9 - 4a^2 - a = (-1)(4a^2 + a - 9)$
- Vypočítat kořeny. Kořeny bývají celočíselné, zkusit je nejprve odhadnout, viz dále Vietovy vzorce: $(x^2 - 3x - 4) = (x + 1)(x - 4)$.
- Pokud kořeny kvadratické rovnice $ax^2 + bx + c = 0$ neodhadneme, vypočítáme je klasicky podle vzorce

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

- Pozor, když rozkládáme trojčlen $ax^2 + bx + c$, nestačí jen vypočítat kořeny, ale nesmíme zapomenout na koeficient u kvadratického členu:
 $ax^2 + bx + c = a(x - x_1) \cdot (x - x_2)$.

4.2 Jak nalézt celočíselné kořeny nebo roznásobit kvadratický trojčlen (Vietovy vzorce)

Vietovy vzorce si ukážeme jen v praxi, nic jiného nemá cenu:

$$\begin{array}{llll} x^2 - 4x + 3 = 0 & 3 = 1 \cdot 3 & -4 = -3 - 1 & (x - 1)(x - 3) = 0 \\ x^2 - x - 6 = 0 & 6 = 2 \cdot 3 & -6 = (-3) \cdot 2 & (x - 3)(x + 2) = 0 \\ a^2 - 5a + 6 = 0 & 6 = 2 \cdot 3 & -5 = -2 - 3 & (a - 3)(a - 2) = 0 \\ y^2 + 3y - 10 = 0 & 10 = 5 \cdot 2 & 3 = 5 - 2 & (y + 5)(y - 2) = 0 \\ x^2 - 22x + 120 = 0 & 120 = 12 \cdot 10 & -22 = -10 - 12 & (x - 12)(x - 10) = 0 \end{array}$$

Odhady kořenů se musí ověřit roznásobením, minimálně vynásobením z paměti, ale pozor na chybu.

5 KVADRATICKÉ NEROVNICE

Z tohoto tématu je 22 úloh z 822. Část z nich je na pomezí s tématy Analytická geometrie, Grafy nebo funkce.

V tomto tématu jsou novinkou pouze tzv. nulové body. Ostatní znalosti jsou zejména umět vypočítat kořeny a umět nakreslit graf paraboly (tj. její obrácení dolů nebo nahoru a kořeny - tj. průsečíky s osou x). Pak je to pár tipů a triků, které známe z úprav algebraických výrazů. Text je možno přeskočit rovnou až na nulové body.

5.1 Tipy

Nerovnici můžeme násobit nebo dělit kladným číslem, například konstantou nebo kladným výrazem typu

$(x^2 + 1)$, $(3x^2 + 14)$, $(x - 3)^2$ pro $x \neq 3$, $(x + 5)^2$ pro $x \neq -5$, x^2 pro $x \neq 0$, apod. V úlohách se často objevuje výraz typu $3 - x$, $2 - x$ místo $x - 3$, $x - 2$. Je to záměrně pro zmatení řešitele. Vždy výraz opravíme na $(-1)(x - 3)$, $(-1)(x - 2)$, apod. Podobně $3 - 2x$ převedeme na $(-1)(2x - 3) = (-2)\left(x - \frac{3}{2}\right)$. Je to z toho důvodu, aby byl „vidět“ kořen a lépe se dělala představa, jak výraz vypadá.

Nerovnici můžeme násobit záporným číslem, ale obracíme znaménko nerovnice. Nerovnici nemůžeme beztestně násobit nebo dělit výrazem typu $x - 5$, pokud nevíme jestli je to kladné nebo záporné číslo nebo nula. Pokud je $x > 5$, tak nerovnici můžeme pochopitelně násobit nebo dělit kladným číslem $x - 5$.

5.2 Triky

$$\frac{x - 3}{x^2 + 1} < 0 \quad \text{neřešíme, protože } x^2 + 1 > 0, \quad \text{takže zbyde } x - 3 < 0$$

$$\frac{x^2 - 5x}{x} \leq 0 \quad \text{zkrátí se na } \frac{x(x - 5)}{x} \leq 0, \quad \text{pozor na podmínku } x \neq 0$$

$$y^2 + 40y + 400 > 0 \quad \text{upravíme na } (y + 20)^2 > 0 \quad \text{a výsledek je } y \neq -20$$

$$\frac{15x}{15x^2} < 0 \quad \text{zkrátí se na } \frac{1}{15x} < 0 \quad \text{pozor na podmínku } x \neq 0$$

$$x^2 + (-15)^2 \leq 0 \quad \text{neřešíme, protože } x^2 + 225 > 0, \quad \text{takže řešení neexistuje}$$

$$\frac{x - 2}{2 - x} > 0 \quad \text{zkrátí se na } -1 \leq 0, \quad \text{takže řešení neexistuje}$$

5.3 Úpravy

$$\frac{1 - x}{x - 7} + 1 < 0 \quad \text{upravíme na společného jmenovatele } \frac{1 - x + x - 7}{x - 7} = -\frac{6}{x - 7} < 0$$

$$\frac{1 - x}{x - 7} < -1 \quad \text{upravíme, aby napravo byla nula } \frac{1 - x}{x - 7} + 1 < 0 \text{ a dále jako výše}$$

Další sada příkladů obsahuje skutečně kvadratické (ne)rovnice

$$\frac{x - 7}{x - 1} > 0 \quad \text{řešíme nulovými body, ihned si napíšeme podmínku } x \neq 1$$

$(x - 3)(x + 2) < 0$ řešíme nulovými body, žádná podmínka

$$\frac{x + 3}{2 - x} < 0,$$

nejprve vynásobíme (-1) , abychom převedli $2 - x$ na $x - 2$,
to je důležité, aby nás potom nepletla znaménka,

$$\frac{x + 3}{x - 2} > 0,$$

ale nezapomeneme obrátit znaménko (násobení záporným
číslem!), řešíme nulovými body, ihned napíšeme podmínku $x \neq 2$

$$x(3 - 2x) \leq 0$$

nejprve vynásobíme (-1) , abychom převedli $3 - 2x$ na $2x - 3$,
to je důležité, aby nás potom nepletla znaménka,

$$x(2x - 3) \geq 0,$$

ale nezapomeneme obrátit znaménko (násobení záporným

$$2x \left(x - \frac{3}{2}\right) \geq 0,$$

číslem!), vytkneme dvojku a řešíme nulovými body

$x^2 + 6x + 5 \leq 0$ řešíme rozkladem na $(x + 1)(x + 5) \leq 0$ a poté nulovými body

$x^2 - 6x + 5 \leq 0$ řešíme rozkladem na $(x - 1)(x - 5) \leq 0$ a poté nulovými body

Čili u zlomků a rovnic **vše převádíme na levou stranu**, aby na pravé straně nerovnice byla nula a napíšeme podmínky.

5.4 Grafické řešení

V příkladech máme tyto možnosti zadání (nezáleží na tom, zda je to rovnice nebo nerovnice):

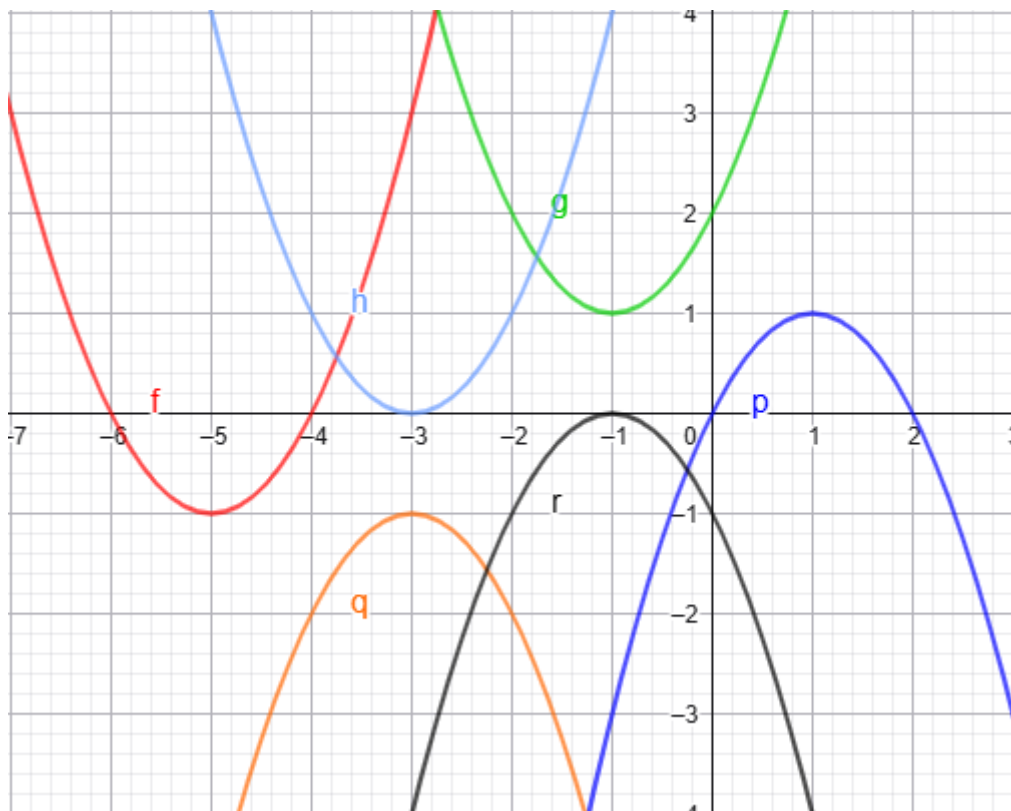
$y = ax^2 + bx + c \leq 0$ vypočteme kořeny $x_{1,2}$ a rozložíme na $a(x - x_1)(x - x_2) \leq 0$
poté řešíme nulovými body nebo grafem

$y = a(x - m)^2 + n > 0$ máme vrchol $V[m, n]$, vypočteme kořeny $x_{1,2}$ a nakreslíme
celou parabolu, pak můžeme řešit rovnici i nerovnici, obvykle v
zadání vychází celočíselné kořeny,

$y = a(x - x_1)(x - x_2) \leq 0$ řešíme nulovými body nebo grafem

Při grafickém řešení si načrtneme kořeny, vrchol a obrácení paraboly, pak řešení přímo
vidíme z nákresu. Mohou nastat jen tyto situace:

- parabola neprotíná osu x – pak je celá nad osou x nebo pod osou x a podle toho je
řešení buď celá \mathbb{R} nebo naopak prázdná množina
- parabola protíná osu x – pak je obrácená vzhůru nebo dolů a podle toho je řešením
interval mezi kořeny nebo vně kořenů



Obr.: možné polohy paraboly vzhledem k (ne)rovnici [VK]

●	$f: y = x^2 + 10x + 24$
●	$g: y = x^2 + 2x + 2$
●	$h: y = x^2 + 6x + 9$
●	$p: y = -x^2 + 2x$
●	$q: y = -x^2 - 6x - 10$
●	$r: y = -x^2 - 2x - 1$

Obr.: popisky parabol [VK]

Ukážeme si řešení

u první (červené) paraboly zleva nahoře:

$$y \geq 0 \text{ v intervalech } x \in (-\infty; -6) \cup (-4; +\infty)$$

$$y > 0 \text{ v intervalech } x \in (-\infty; -6) \cup (-4; +\infty)$$

$$y = 0 \text{ pro } x \in \{-6; -4\}$$

$$y < 0 \text{ v intervalu } x \in (-6; -4)$$

u první (oranžové) paraboly zleva dole:

$$y \geq 0 \text{ nikdy, tj. množina řešení } K = \emptyset$$

$$y = 0 \text{ nikdy, tj. množina řešení } K = \emptyset$$

$$y < 0 \text{ vždy, tj. množina řešení } K = R$$

Kvadratický trojčlen $ax^2 + bx + c \geq 0$ si představíme jako parabolu. Důležité jsou kořeny a vrchol. Obojí lze získat **klasickými vzorečky** pro kořeny nebo **téměř vždy odhadem pomocí Vietových vzorců**. Vrchol je uprostřed kořenů, parabola je symetrická.

5.5 Nulové body

Nerovnici můžeme mít klasickou, jako například

$$2x^2 - 5x - 7 < 0.$$

nebo složitější, třeba

$$\frac{x-2}{4-x} + \frac{1}{3} > \frac{4-4x}{3x-9},$$

nebo

$$\frac{x^2 + 7x - 32}{2x^2 - 5x - 7} \geq 10,$$

apod. Všechny tyto úlohy řešíme stejně:

1. Převědeme vše na levou stranu, na pravé straně bude nula
2. Na levé straně vznikne buď kvadratický trojčlen (viz první příklad) nebo tam vznikne složitější výraz, který je v tomto tématu vždy nějaký zlomek, kde v čitateli je kvadratický trojčlen a ve jmenovateli kvadratický trojčlen nebo lineární dvojčlen
3. Složitější výraz je vždy zlomek

Poznámka k definici. "Nulové body funkce $f(x)$ " jsou přesně podle definice ty hodnoty proměnné x , pro něž je funkce $f(x)$ rovna nule. Nulové body funkce $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ jsou tedy jen nulové body $P(x)$, zatímco nulové body $Q(x)$ nejsou vůbec v definičním oboru funkce $f(x)$. Když ale řešíme nerovnici a říkáme, že "**nerovnici $\frac{P(x)}{Q(x)} \leq 0$ řešíme pomocí nulových bodů**", tak **používáme** jak nulové body polynomu $P(x)$, tak nulové body polynomu $Q(x)$.

Nulové body jsou tedy při řešení nerovnice kořeny čitatele a kořeny jmenovatele. Ve jmenovateli jsou to vlastně zakázané body, které tvoří podmínku, abychom nedělili nulou. Výše uvedené příklady bychom přepsali následovně.

U prvního příkladu

$$2x^2 - 5x - 7 < 0$$

vypočteme kořeny:

$$x_{1,2} = \frac{+5 \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-7)}}{2 \cdot 2} = \frac{+5 \pm \sqrt{25 + 56}}{4} = \frac{+5 \pm \sqrt{81}}{4} = \frac{+5 \pm 9}{4} = 7; -1$$

Takže kvadratický trojčlen je

$$2(x-7)(x+1) < 0.$$

Nulové body jsou $-1; 7$, protože v nich je ten kvadratický trojčlen roven nule.

U druhého příkladu postupujeme podle návodu: vše převést nalevo, upravit na zlomek, ve zlomku nalézt kořeny v čitateli i jmenovateli:

$$\frac{x-2}{4-x} + \frac{1}{3} > \frac{4-4x}{3x-9}$$

Uděláme jen drobné úpravy, pomalu, postupně. Ve jmenovateli je lepší místo $4-x$ mít $x-4$ a také se dá vytknout trojka z $3x-9$:

$$\frac{2-x}{x-4} + \frac{1}{3} > \frac{4-4x}{3(x-3)}$$

$$\frac{2-x}{x-4} + \frac{1}{3} - \frac{4-4x}{3(x-3)} > 0$$

$$\frac{3(2-x)(x-3) + (x-4)(x-3) - (4-4x)(x-4)}{3(x-4)(x-3)} > 0$$

Pokud je násobek nebo mínus před složitějším výrazem, nejprve zpracujeme výraz v závorce! Nedělat dva kroky najednou! Je to nejčastější příčinou chyb!

$$\frac{3(2x-6-x^2+3x) + x^2-4x-3x+12 - (4x-16-4x^2+16x)}{3(x-4)(x-3)} > 0$$

Je jasné, že trojku ve jmenovateli nemusíme psát, je to jako vynásobit nerovnici +3:

$$\frac{6x-18-3x^2+9x+x^2-7x+12-4x+16+4x^2-16x}{(x-4)(x-3)} > 0$$

$$\frac{2x^2-12x+10}{(x-4)(x-3)} > 0$$

Můžeme vydělit dvěma:

$$\frac{x^2-6x+5}{(x-4)(x-3)} > 0$$

A nyní buď odhadneme kořeny v čitateli (pomocí Vietových vzorců) nebo je vypočteme

$$x_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5}}{2} = \frac{6 \pm 4}{2} = 5 \text{ a } 1, \text{ tj.}$$

$$\frac{(x-5)(x-1)}{(x-4)(x-3)} > 0$$

Nulové body jsou z čitatele 5 a 1 a ze jmenovatele 4 a 3 (jsou to zároveň podmínky $x \neq 4, x \neq 3$). **Nulové body seřadíme a vyznačíme na reálné ose 1, 3, 4, 5 a** nerovnici výše vyřešíme pomocí metody nulových bodů (viz odstavec na konci).

U třetího příkladu postupujeme opět podle návodu: vše převést nalevo, upravit na zlomek, ve zlomku nalézt kořeny v čitateli i jmenovateli:

$$\frac{x^2+7x-32}{2x^2-5x-7} \geq 10$$

$$\frac{x^2+7x-32}{2x^2-5x-7} - 10 \geq 0$$

$$\frac{x^2+7x-32-10(2x^2-5x-7)}{2x^2-5x-7} \geq 0$$

Uděláme jen drobné úpravy, pomalu, postupně:

$$\frac{x^2+7x-32-20x^2+50x+70}{2x^2-5x-7} \geq 0$$

$$\frac{-19x^2+57x-38}{2x^2-5x-7} \geq 0$$

Nyní je lepší přenásobit nerovnici mínus jedničkou, aby vznikl kladný koeficient u x^2 :

(otočíme znaménko !!!)

$$\frac{19x^2 - 57x + 38}{2x^2 - 5x - 7} \leq 0$$

a vypočteme kořeny kvadratických trojčlenů nahoře i dole

$$x_{1,2} = \frac{57 \pm \sqrt{(-57)^2 - 4 \cdot 19 \cdot (+38)}}{2 \cdot 19} = \frac{57 \pm \sqrt{361}}{38} = \frac{57 \pm 19}{38}, \text{ tj. kořeny jsou } 2 \text{ a } 1, \text{ tj.}$$

$$x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-7)}}{2 \cdot 2} = \frac{6 \pm 9}{4}, \text{ tj. kořeny jsou } \frac{15}{4} \text{ a } -\frac{3}{4}, \text{ takže nerovnice má tvar.}$$

$$\frac{19(x-2)(x-1)}{2\left(x-\frac{15}{4}\right)\left(x+\frac{3}{4}\right)} \leq 0$$

Můžeme vydělit $\frac{19}{2}$ a máme čistou nerovnici:

$$\frac{(x-2)(x-1)}{\left(x-\frac{15}{4}\right)\left(x+\frac{3}{4}\right)} \leq 0$$

Nulové body jsou z čitatele 2 a 1 a ze jmenovatele $\frac{15}{4}$ a $-\frac{3}{4}$ (jsou to zároveň podmínky $x \neq \frac{15}{4}, x \neq -\frac{3}{4}$). Nulové body seřadíme a vyznačíme na reálné ose $-\frac{3}{4}, 1, 2, \frac{15}{4}$ a nerovnici výše vyřešíme pomocí metody nulových bodů.

5.6 Řešení nerovnic nulovými body

Ukážeme si nulové body na příkladu. Obvykle řešíme nerovnici typu

$$(x-1)(x+5)(x-3) > 0 \quad (1)$$

nebo typu

$$\frac{(x-1)(x+5)}{(x-3)} > 0 \quad (2)$$

Nulové body jsou v obou případech všechny ty hodnoty x , pro něž je nějaký činitel roven nule, tj. jak v součinu (1), tak v podílu (2) to jsou body 1, -5, 3. V případě (2) okamžitě píšeme podmínku $x \neq 3$. Podstatné je, že zkoumáme, kdy je výraz $V(x)$ na levé straně nerovnice kladný nebo záporný. V tom případě nehrají roli hodnoty těch dílčích činitelů, ani to, jestli se jimi dělí nebo násobí, ale hrají zde roli jen jejich znaménka! A právě znaménka těch činitelů se mění v jejich nulových bodech.

Důležité je vyznačit nulové body na číselné ose od nejmenšího k největšímu, tj. -5, 1, 3.

Číselná osa je tak rozdělena na malé intervaly $(-\infty; -5)$, $(-5; +1)$, $(+1; +3)$, $(+3; +\infty)$.

Trik nulových bodů je v tom, že znaménko každého jednotlivého činitele ve výrazu $V(x)$ se mění právě jen v jeho nulovém bodě. Nalevo od nulového bodu až do mínus nekonečna je buď stabilně kladné nebo stabilně záporné, v nulovém bodě je nulové a napravo od nulového bodu až do plus nekonečna je zase stabilně záporné nebo stabilně kladné. Malé intervaly, na něž dělí číselnou osu nulové body, tak vytváří oázy, v nichž je znaménko každého činitele stabilní, tj. celý výraz $V(x)$ má v tomto malém intervalu stabilní znaménko.

Znaménko můžeme určit úvahou nebo trikem, že si v každém malém intervalu vybereme nějakou konkrétní šikovnou hodnotu x a spočítáme pro ni znaménko našeho výrazu $V(x)$. Právě jsme ukázali, že to znaménko $V(x)$ bude stabilně shodné v celém dílčím intervalu.

Pro $V(x) = (x-1)(x+5)(x-3)$:

V prvním intervalu $(-\infty; -5)$ zvolíme například hodnotu $x = -6$ a máme

$$V(-6) = (-7) \cdot (-1) \cdot (-9) = -63 < 0, \text{ takže v celém intervalu } (-\infty; -5) \text{ je } V(x) < 0$$

V druhém intervalu $(-5; +1)$ zvolíme například hodnotu $x = 0$ a máme $V(0) = (-1) \cdot 5 \cdot (-2) = 10 > 0$, takže v celém intervalu $(-5; +1)$ je $V(x) > 0$
 Ve třetím intervalu $(+1; +3)$ zvolíme například hodnotu $x = 2$ a máme $V(2) = (+1) \cdot 7 \cdot (-1) = -7 < 0$, takže v celém intervalu $(+1; +3)$ je $V(x) < 0$
 Ve čtvrtém intervalu $(+3; +\infty)$ zvolíme například hodnotu $x = 4$ a máme $V(4) = (3) \cdot 9 \cdot (+1) = 27 > 0$, takže v celém intervalu $(+3; +\infty)$ je $V(x) > 0$

Nerovnice $(x - 1)(x + 5)(x - 3) > 0$ má potom řešení $x \in (-5; +1) \cup (+3; +\infty)$.

Vždy musíme na konci řešení zkontrolovat, zda nulové body patří do řešení nebo ne nebo jsou dokonce zakázané podmínkami.

Jako pomůcka pro určení může sloužit tato minitabulka [VK]:

	$-\infty$	-5	$+1$	$+3$	$+\infty$
		$(-\infty; -5)$	$(-5; +1)$	$(+1; +3)$	$(+3; +\infty)$
$x+5$	-	+	+	+	
$x-1$	-	-	+	+	
$x-3$	-	-	-	+	
$V(x)$	-	+	-	+	

Když jsou nulové body srovnané podle velikosti na té číselné ose, tak znaménka mají viditelnou pravidelnost a zlom nastává právě v nulových bodech.

Vždy musíme zvlášť u každého nulového bodu rozhodnout, zda patří do řešení nebo ne.

Kdybychom řešili nerovnice

$$(x - 1)(x + 5)(x - 3) \geq 0$$

a

$$\frac{(x - 1)(x + 5)}{(x - 3)} \geq 0$$

tak by řešení byla rozdílná v tom, že bod $x = 3$, by byl součástí řešení první nerovnice (násobení nulou), ale už ne druhé nerovnice (dělení nulou).

6 ČÍSELNÉ MNOŽINY

Z tohoto tématu je 33 úloh z 822, většinou jsou to jednobodové úlohy. Přesto u nich dochází často k nepochopení zadání nebo neschopnosti najít řešení, protože jsou různorodé, různě formulované a z více oblastí matematiky. **Nelze dost dobře v nich hledat nějaký vzor, který by se dal naučit.** Tyto úlohy cílí na základní znalosti.

Často se zaměňuje průnik za sjednocení.

Je třeba dát pozor na krajní body intervalů a jak se projeví v průniku nebo sjednocení.

průniky a sjednocení intervalů

$A \cap B$ označuje průnik množin A a B, tj. množinu všech prvků, které jsou jak v množině A, tak v množině B

$A \cup B$ označuje sjednocení množin A a B, tj. množinu všech prvků dohromady jak z množiny A, tak z množiny B

vyjadřování neznámé ze vzorce

požadovanou neznámou převedeme na levou stranu a vše ostatní na pravou, pokud je neznámá ve více výrazech na levé straně, vytkneme jí

Číselné osy, intervaly, průniky, to všechno je v tabulkách. Připomeňme jen ty úplně nejzákladnější:

N je množina všech přirozených čísel

Z je množina všech celých čísel

R je množina všech reálných čísel

často se setkáváme s výrazem $\mathbf{R} \setminus \{0\}$, což je množina všech reálných čísel, kromě nuly

7 VYJADŘOVÁNÍ NEZNÁMÉ ZE VZORCE

Z tohoto tématu je 9 úloh z 822, většinou jsou to jednobodové úlohy, ale dost často je studenti neudělají dobře.

Vyjadřování neznámé ze vzorce je jednoduché. Požadovanou neznámou převedeme na levou stranu a vše ostatní na pravou, pokud je neznámá ve více výrazech na levé straně, vytkneme jí a pak rovnici vydělíme. Žádné rady nejsou, je to základní znalost.

8 LINEÁRNÍ ROVNICE, PROCENTA, ZLOMKY, PŘEVODY

Z tohoto tématu je 46 úloh z 822. V těchto třech tématech, která jsme sloučili, se objevují jednodušší úlohy, které se příliš v maturitních úlohách neopakují. Kromě tématu „procenta“ se většinou nedá zjistit nějaký vzor, který by se vyskytoval častěji.

Soustavy lineárních rovnic se řeší klasicky, vyjádřením jedné proměnné pomocí ostatních a její dosazení do zbylých rovnic. Druhá možnost je vynásobit rovnice tak, aby se při jejich sečtení nějaká proměnná vyloučila.

Procenta

Pro ty, kdo se necítí, že procenta zvládnou v pohodě, je tu postup, který je sice delší, ale názorný. Vždycky, když počítáme procenta z něčeho, tak je důležité zapsat to "z čeho". A jedno procento je $\frac{1}{100}$, třicet procent je $\frac{30}{100}$, atd. Ukážeme na příkladu. V úlohách, kde se různě kombinuje zdražení a zlevnění nebo přilítí něčeho a odlítí nebo podobně, tak vždy po jakémkoliv změně je nutné si uvědomit, že to je nový aktuální stav (aktuální cena, aktuální stav vody, aktuální počet studentů, aktuální stav konta, apod.). Další **změna musí vycházet vždy z (nového, změněného) aktuálního stavu**. Z té ceny nebo stavu se pak počítá zdražení nebo zlevnění, a tím vzniká zase nový aktuální stav. A další změna se počítá zase jen a jen z aktuálního stavu.

Klasická poučka je, že zdražení o N procent a poté zlevnění o N procent nedává stejnou cenu jako na začátku.

A také zlevnění o N procent a poté zdražení o N procent také nedává stejnou cenu jako na začátku. Vždy je nutné zlevnění nebo zdražení počítat z aktuálního stavu, z aktuální ceny, viz například řešení příkladu 2024J_02, 2017J_11 a 2024P_16 dále (viz též řešené příklady v Příloze 1).

Další už je navíc a nepatří do "minimálních znalostí". Celé toto téma totiž vyžaduje zcela základní znalosti z matematiky, na úrovni základní školy. *Pro jistotu* je řešení následujících vzorových příkladů uvedeno přímo i zde, "v učebním textu", i když řešení těchto příkladů je klasicky uvedeno i v Příloze č. 1 k tomuto tématu,

8.1 Příklad. Zlevnění a zdražení (2024J_02, [CZVV])

Prodejce mobil zlevnil o 30 %, poté se začal mobil prodávat lépe. Prodejce zareagoval tak, že ho postupně dvakrát zdražil. První zdražení bylo o 20 % ze zlevněné ceny a pak ještě o 10 % z ceny po prvním zdražení. Výsledná cena po všech změnách je 11 088 Kč.

Vypočtete původní cenu mobilu.

Pomalé postupné řešení:

Původní cena mobilu ... m Kč. **To je nyní aktuální cena.**

Po zlevnění je cena $m - (30 \% z m)$ Kč. To je $m - \frac{30}{100}m = \frac{70}{100}m$. **Nyní je aktuální cena** ($\frac{70}{100}m$).

Nyní následuje zdražení o 20 %. Ale je to zdražení aktuální ceny. Takže po zdražení o 20 % je nová cena $\frac{70}{100}m + (20 \% z \frac{70}{100}m) = \frac{70}{100}m + \frac{20}{100} \cdot \frac{70}{100}m = \frac{70}{100}m + \frac{14}{100}m = \frac{84}{100}m$. **Nyní je aktuální cena** ($\frac{84}{100}m$).

Po zdražení aktuální ceny o 10 % je nová cena $\frac{84}{100}m + (10 \% z \frac{84}{100}m) = \frac{84}{100}m + \frac{10}{100} \cdot \frac{84}{100}m = \frac{84}{100}m + \frac{8,4}{100}m = \frac{92,4}{100}m$

Výsledná cena je tedy $\frac{92,4}{100}m$ o které říkají, že je 11088 Kč. Tedy $\frac{92,4}{100}m = 11088$ a odtud $m = 12000$.

Můžeme řešit rychleji, ale pozor na chyby:

Původní cena mobilu ... m Kč.

Po zlevnění o 30 % je cena 70 % z m . To je $\frac{70}{100}m$. **To je teď aktuální cena.**

Po prvním zdražení o 20 % je cena 120 % aktuální ceny, tj. $\frac{120}{100}(\frac{70}{100}m) = \frac{84}{100}m$. **To je teď aktuální cena.**

Po druhém zdražení o 10 % je cena 110 % aktuální ceny, tj. $\frac{110}{100}(\frac{84}{100}m) = \frac{92400}{10000}m = \frac{92,4}{100}m$.

Výsledná cena je tedy $\frac{92,4}{100}m = 11088$ a odtud $m = 12000$

8.2 Příklad. Dvojitá zlevnění (2017J_11, [CZVV])

Obchod při výprodeji snížil původní cenu zboží o 40 %. Navíc svým věrným zákazníkům rozeslal SMS zprávu s nabídkou další 15 % slevy z ceny již zlevněného zboží.

Vypočtete, o kolik procent se původní cena zboží snížila věrným zákazníkům, kteří využili i slevu nabízenou v SMS zprávě.

Řešení.

Původní cena zboží ... x Kč.

Při výprodeji cena $x - (40 \% \text{ z } x) = 60 \% x = \frac{60}{100} x$

Další sleva 15 % z již zlevněné ceny.

Nová cena je $\frac{60}{100} x - 15 \% \text{ z } \frac{60}{100} x = \frac{60}{100} x - \frac{15}{100} \cdot \frac{60}{100} x = \frac{60}{100} x - \frac{900}{10000} x = \frac{6000 - 900}{10000} x = \frac{5100}{10000} x = \frac{51}{100} x$. Nová cena je tedy 51 % z původní ceny. Došlo tedy celkově ke zlevnění o 49 %.

Rychlejší řešení je toto:

Původní cena zboží ... x Kč.

Při výprodeji se cena snížila o 40 %, tedy na $60 \% x = \frac{60}{100} x$

Další sleva byla 15 % z již zlevněné ceny, čili cena se snížila na 85 % již zlevněné ceny

($\frac{60}{100} x$). Takže nová cena je $\frac{85}{100} \cdot \frac{60}{100} x = \frac{5100}{10000} x = \frac{51}{100} x$.

Nová cena je tedy 51 % z původní ceny. Došlo tedy celkově ke zlevnění o 49 %.

8.3 Příklad. Měřítko mapy (2024P_16, [CZVV])

16 Délka 40 mm na mapě odpovídá vzdálenosti 20 km ve skutečnosti.

Jaké je měřítko mapy?

- A) 1 : 500
- B) 1 : 5 000
- C) 1 : 50 000
- D) 1 : 500 000
- E) jiný výsledek

Řešení.

Ke zjištění měřítka musíme najít odpovídající vzdálenost na mapě a ve skutečnosti ve stejných jednotkách. Často se říká 1 cm na mapě odpovídá 50 000 cm ve skutečnosti. Pak je měřítko 1 : 50 000. V této úloze tedy musíme převést 20 km na milimetry.

20 km ve skutečnosti je 20 000 metrů, což je $20\,000 \cdot 1000$ milimetrů, tj. 20 000 000 milimetrů. 40 mm na mapě tedy odpovídá 20 000 000 milimetrům ve skutečnosti, měřítko tedy je $40 : 20\,000\,000 = 1 : \frac{20\,000\,000}{40} = 1 : 50\,000$. Měřítko je tedy 1 : 50 000.

9 LINEÁRNÍ NEROVNICE

Z tohoto tématu je 15 úloh z 822. Lineární nerovnice jsou většinou dvě, z každé vyplyne že x (nějaká proměnná) má být v nějakém intervalu, takže proměnná x musí být v průniku obou intervalů. Je třeba dát pozor na krajní body intervalů a jak se projeví v průniku nebo sjednocení.

$A \cap B$ označuje průnik množin A a B, tj. množinu všech prvků, které jsou jak v množině A, tak v množině B.

U nerovnic je zásadní, že se s nimi pracuje jako s rovnicemi, ale s jednou jedinou, ale naprosto významnou odchylkou: **nesmíme jen tak násobit neznámým nebo záporným číslem.**

Jestli je ve jmenovateli nebo čitateli záporné číslo, můžeme nerovnici násobit, ale musíme změnit znaménko.

Jestli je ve jmenovateli nebo čitateli neznámé číslo, nesmíme násobit. Musíme nerovnici převést na zlomek a pak využít tzv. **nulové body**. Nulové body jsou vysvětleny v kapitolách o kvadratických nerovnicích

10 POSLOUPNOSTI – obecná, aritmetická a geometrická

Z tohoto tématu je 58 úloh z 822. **Vše potřebné, zejména vzorečky k posloupnostem, jsou v Tabulkách.**

Aritmetická a geometrická posloupnost jsou velmi lukrativní maturitní úlohy, protože je jich relativně hodně a dají se naučit. Stačí znát 4 vzorce a natrénovat tak 10 příkladů a výsledek je neočekávaně dobrý.

Objevují se tu tři pojmy: obecná posloupnost, aritmetická posloupnost (AP) a geometrická posloupnost (GP).

10.1 Obecná posloupnost

Obecná posloupnost se v maturitních úlohách **téměř neobjevuje**, ale objevuje se obecné označování. Posloupnost čísel je prostě nějaká očíslovaná řada čísel, jenom se dodržuje pravidlo, že to číslování je souvislé. Členy obecné posloupnosti se často značí a_n , přičemž ten index n právě patří k tomu "očíslování" posloupnosti. Například můžeme mít konečnou posloupnost a_2, a_3, a_4, a_5 , nebo nekonečnou posloupnost a_5, a_6, a_7, \dots až do nekonečna, nejčastěji a_1, a_2, a_3, \dots až do nekonečna.

Zkráceně píšeme $(a_n)_{n=2}^{n=5}$ nebo $(a_n)_{n=5}^{n=\infty}$ nebo $(a_n)_{n=1}^{n=\infty}$. Členy posloupnosti můžeme označovat i jinými písmeny.

Číslo a_n , tj. n -tý člen posloupnosti, můžeme definovat libovolně, například jako

$$a_n = 52 - 16 \cdot n.$$

nebo ekvivalentně jako

$$(52 - 16 \cdot n)_{n=1}^{n=\infty}.$$

To znamená, že když si zvolíme index n , např. $n = 100$, tak máme definován stý člen posloupnosti jako

$$a_{100} = 52 - 16 \cdot 100 = 52 - 1600 = -1548.$$

Trochu problém někdy dělá otázka, čemu je roven a_{n+1} ? Prostě dosadíme ten index (pozor, teď je to "n+1") do vzorečku:

$$a_{n+1} = 52 - 16 \cdot (n + 1).$$

Stejně tak můžeme dosadit za index cokoli jiného, třeba $m+k$. Pak máme

$$a_{m+k} = 52 - 16 \cdot (m + k).$$

Ta posloupnost má prostě definovanou hodnotu podle indexu, a ten může být jaký chce, prostě nějaké "n". Pak můžeme třeba počítat součet tří za sebou jdoucích prvků posloupnosti jako

$$\begin{aligned} a_n + a_{n+1} + a_{n+2} &= 52 - 16 \cdot n + 52 - 16 \cdot (n + 1) + 52 - 16 \cdot (n + 2) \\ &= 52 - 16n + 52 - 16n - 16 + 52 - 16n - 32 = 108 - 48n. \end{aligned}$$

To bude velmi časté u příkladů z aritmetické a geometrické posloupnosti, kde budeme potřebovat sečíst třeba n členů posloupnosti $a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} + a_n$.

10.2 Aritmetická posloupnost

Aritmetická posloupnost je dána prvním členem a_1 a diferencí d . Každý následující člen je o diferenci d větší než předchozí člen, tak se postupně vytváří členy: $a_{n+1} = a_n + d$, konkrétně $a_2 = a_1 + d$, $a_3 = a_2 + d = a_1 + 2d$, $a_4 = a_3 + d = a_1 + 3d$. Není překvapením, že když dojdeme od a_1 k a_n , tak popojdeme o $(n - 1)$ diferencí, tj.

$$a_n = a_1 + (n - 1)d.$$

To je **první vzorec**, který si musíme pamatovat. Je na něm nejobtížnější to, že index u a_n je n , ale diferencí je jen $n - 1$.

Druhý vzorec umí najednou spočítat součet

$$s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n = (a_1 + a_n) \frac{n}{2}$$

Tento vzorec se dobře pamatuje, protože součet prvních n členů je (první + poslední člen) krát počet členů, děleno dvěma. S těmito dvěma vzorci si vystačíme na všechny úlohy! **Důležité je pamatovat si, že vše je určeno prvním členem a_1 a diferencí d .** To říkají ty dva vzorce. Krása druhého vzorce vynikne, když si představíme, že máme sečíst 1000 nebo milion členů posloupnosti. Stačí nám na to jeden součet a jedno násobení.

Na příkladech si ukážeme, jak jednoduché jsou příklady, když se držíme zásady, že vše vyjadřujeme pomocí prvního členu a_1 a diference d . I když ve vzorci $a_{n+1} = a_n + d$ máme "plus d ", d může být záporné, takže posloupnost bude klesat. Ale na tom nezáleží, záleží jen na tom, že následující prvek se od předchozího liší o tu diferenci, jestli je záporná nebo kladná, nemá vliv na žádný vzorec.

10.3 Geometrická posloupnost

Geometrická posloupnost je analogická té aritmetické. Opět tu budou jen dva vzorce.

Geometrická posloupnost je opět dána prvním členem a_1 a tzv. kvocientem q . Každý následující člen bude tady q -násobkem předchozího členu, čili tak se postupně vytváří členy: $a_{n+1} = a_n \cdot q$, konkrétně $a_2 = a_1 \cdot q$, $a_3 = a_2 \cdot q = a_1 \cdot q^2$, $a_4 = a_3 \cdot q = a_2 \cdot q^2 = a_1 \cdot q^3$, atd. Není překvapením, že když dojdeme od a_1 k a_n , tak popojdeme o $(n - 1)$ operací násobení, tj.

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}.$$

To je **první vzorec**, který si musíme pamatovat. Je na něm nejobtížnější to, že index u a_n je n , ale mocnina u q je jen $(n - 1)$.

Druhý vzorec umí najednou spočítat součet

$$s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

U tohoto vzorce je tentokrát n -tá mocnina u q , ale to si musíme zapamatovat. Pokud ne, nalezneme ho v tabulkách, ale bez tohoto vzorce to nepůjde. S těmito dvěma vzorci si opět vystačíme na všechny úlohy! **Důležité je pamatovat si, že vše je určeno prvním členem a_1 a kvocientem q .** To říkají ty dva vzorce. Krása druhého vzorce opět vynikne, když si představíme, že máme sečíst 1000 nebo milion členů posloupnosti!!!

Na příkladech si ukážeme, jak jednoduché jsou příklady, když se držíme zásady, že vše vyjadřujeme pomocí prvního členu a_1 a kvocientu q . I když ve vzorci $a_{n+1} = a_n \cdot q$ máme krát q , q může být záporné nebo menší než jedna, takže posloupnost bude klesat nebo oscilovat mezi kladnými a zápornými čísly (mínus krát mínus je plus). Ale na tom nezáleží, záleží jen na tom, že podíl následujícího prvku a předchozího prvku je konstantní (kvocient):

$$q = \frac{a_2}{a_1}$$

nebo $q = \frac{a_{23}}{a_{22}}$ nebo $q^2 = \frac{a_3}{a_1}$, obecně $q = \frac{a_{n+1}}{a_n}$, apod.

11 FINANČNÍ MATEMATIKA

Z tohoto tématu je jen 12 úloh z 822, nicméně se tyto úlohy objevují ve SCIO testech nebo přijímačkách na VŠE. U finanční matematiky se v maturitních úlohách objevuje pouze tzv. složené úročení, což poskytuje většinou banka, nebo je to úročení u dluhu, které může být ještě nějak ovlivněno, třeba splátkami nebo tím, že v těch úlohách nefiguruje žádná daň z úroku, kterou platí banky za klienty.

11.1 Složené úročení u bank

Budeme pracovat se vzorcem složeného úrokování, který je nutné si zapamatovat:

$$I_n = I_0 \cdot \left(1 + \frac{p \cdot k}{100}\right)^n$$

kde

I_0 počáteční jistina (počáteční vklad)

p úrok p % za jedno **úročené období** (například $p = 4,8$ % za rok)

k daňový koeficient, u nás je $k = 0,85$, protože máme 15 % daň z úroku

I_n jistina, která vznikne **po n úročených obdobích** počáteční jistina

Poznámky:

p úrok p % za jedno úročené období (může to být den, měsíc nebo rok).

Udává se tak, jak ho udávají banky, tj. v procentech. Převod na poměrnou část celku zajistí ve vzorcí ten podíl $\frac{p}{100}$. Po uplynutí jednoho úročeného období banka připíše k jistině úrok za jedno úročené období, a strhne z něho daň, takže jistina po prvním úročeném období je

$$I_1 = I_0 \cdot \left(1 + \frac{p \cdot k}{100}\right)^1$$

Čili když banka nabízí roční úrok $p = 4,8$ %, můžeme očekávat, že dostaneme jen $p \cdot 0,85 = 4,8 \% \cdot 0,85 = 4,08$ %. Takže úrok je ve skutečnosti 4,08 %. Některé banky mohou uvádět úrok už po zdanění, potom pochopitelně $k=1$.

Po uplynutí druhého úročeného období banka připíše k jistině, která je nyní I_1 (!) úrok za jedno úročené období, a strhne z něho daň, takže jistina po druhém úročeném období je

$$I_2 = I_1 \cdot \left(1 + \frac{p \cdot k}{100}\right)^1 = I_0 \cdot \left(1 + \frac{p \cdot k}{100}\right)^2$$

Tímto vzniká vzorec jistiny po n -tém úročeném období: $I_n = I_0 \cdot \left(1 + \frac{p \cdot 0,85}{100}\right)^n$, který budeme

hojně využívat. To číslo $q = \left(1 + \frac{p \cdot k}{100}\right)^1$ nám vlastně říká jaký je kvocient geometrické řady $I_0, I_1, I_2, \dots, I_n$, protože tímto číslem se vždy na konci úročeného období násobí předchozí jistina. A to je definice geometrické řady.

V následujících příkladech platí pravidlo, že použijeme téměř vždy tento jeden vzorec a jen do něj dosadíme hodnoty, které jsou specifikovány v příkladu. Plus trochu logiky.

11.2 Dluhy, hypotéky, úvěry, odpisy majetku

U dluhů, hypoték, úvěrů, odpisů majetku se sice jedná o složené úrokování, ale „koeficient daně k “ není 0,85, protože klient nezískává úrok, takže z něj neplatí daň. Proto do vzorečku dosazujeme $k = 1$. Při úvěru dluh narůstá složeným úročením (ale $k = 1$). Při odepisování majetku naopak hodnota majetku klesá (i tady se ale žádná daň neplatí, takže $k = 1$), ale hodnota „jistiny“ se nezvyšuje, nýbrž snižuje, takže ve vzorečku

$$I_n = I_0 \cdot \left(1 + \frac{p \cdot k}{100}\right)^n$$

se změně plus na mínus, protože hodnota úvěru nebo majetku se snižuje o příslušné procento p :

$$I_n = I_0 \cdot \left(1 - \frac{p \cdot k}{100}\right)^n$$

===

kde

I_0 nikoli počáteční jistina, ale počáteční dluh nebo počáteční úvěr nebo počáteční hodnota majetku, jehož hodnota se odepisuje

p úrok p % za jedno **úročené období** (například $p = 4,8\%$ za rok u dluhu nebo hypotéky), nebo procento p „odpisu majetku (většinou za 1 rok)“

k normálně je to daňový koeficient, ale u dluhů, hypoték, úvěrů, odpisů nevzniká příjem, takže žádná daň se neplatí, takže $k = 1$

I_n konečná hodnota dluhu (majetku), která vznikne **po n úročených obdobích**

12 KOMBINATORIKA

Z tohoto tématu je 49 úloh z 822. Ke kombinatorice najdeme vzorečky v Tabulkách. Je to ale jen pár pojmů a vzorečků, které stojí za to se naučit.

12.1 Faktoriál

Faktoriál není nic těžkého, jde jen o označení pro součin čísel: $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n$ pro všechna přirozená čísla $n = 1, 2, 3, \dots$, a navíc se pro úplnost definuje $0! = 1$. Využijeme to dále u kombinačních čísel, jinak to nemá smysl.

12.2 Permutace

Právě uvedené číslo $n!$ je zároveň počet permutací n různých čísel. Slovo permutace chápeme v češtině jako uspořádání, pořadí. Permutace je prostě různé uspořádání n čísel a $n!$ je počet možností, jak čísla uspořádat za sebou.

Příklad

V atletickém závodě je pět běžkyň a my si chceme sestavit všechny možné výsledky, jak mohou doběhnout. Tady samozřejmě pořadí vybrané běžkyně je to nejpodstatnější. První vybraná bude vítěz, další si stoupne na druhý stupeň vítězů a další na třetí stupeň, čtvrtá dostane bramborovou medaili a pátá nic. Počet možností, jak závod dopadne je logicky $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$, protože nejprve vybíráme první běžkyni ze všech 5, tak máme 5 možností. Potom vybíráme druhou běžkyni, ale už jen ze 4 běžkyň, takže teď máme $5 \cdot 4$ možností, pak třetí běžkyni, tu můžeme k prvním dvěma přidat třemi způsoby, protože nám zbyly jen tři běžkyně atd., takže máme opravdu $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5!$ možností jak dopadne závod.

Doporučení

V úlohách z kombinatoriky postupujte vždycky logicky podobně jako v příkladu, představte si situaci a kombinujte možné postupy, jak dosáhnout výsledku, tím uvidíte kolika cestami se k výsledku můžete dostat.

12.3 Kombinační číslo

Je to nejpoužívanější číslo v kombinatorice. Číslo

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

udává, kolikrát je možno vybrat k předmětů z n různých předmětů, nebo také **kolik různých k -tic lze vybrat z n různých prvků**. Pokud si nebudete vědět rady s nějakým kombinačním číslem, rozepište si ho podle vzorce

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot k \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-k)}$$

Zacházejte s faktoriály a kombinačními čísly jako s obyčejnými čísly! Ještě jedna důležitá rada. Vzorec pro kombinační číslo

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

může mít místo čísel „ n “ a „ k “ jakákoliv přirozená čísla nebo nulu, kde požadujeme jen $n \geq k$. I když „praktický“ smysl má kombinační číslo pro nenulová čísla, dodefinovává se pro úplnost

$$\binom{n}{0} = 1, \binom{0}{0} = 1$$

a dále platí i podle vzorce

$$\binom{n}{n} = 1, \binom{n}{1} = n$$

Příklad. Losování

Typickým příkladem je vybírání očíslovaných míčků z osudí. Když je v osudí 39 míčků a stroj třeba vybírá (vyfukuje) sedm míčků, může to udělat přesně

$$\binom{39}{7}$$

způsoby, protože to je podle definice kombinačního čísla počet různých sedmic, vybíraných z 39 prvků. U kombinačního čísla je důležité, že se míčky nevrací do osudí, prostě vypadnou z osudí ven. Nemůže se tedy stát, že jedno číslo bude taženo dvakrát. A také je důležité, že ve skupině vylosovaných čísel je podstatná celá jejich skupina dohromady, nikoli to, kdy byly jednotlivé míčky taženy. Říkáme, že „**nezáleží na pořadí**“, v tomto případě nezáleží na pořadí vylosovaných čísel.

Příklad. Losování, kdyby záleželo na pořadí

U klasických loterií nikdy nezáleží na pořadí, ale třeba máme následující příklad. Sponzor školy zakoupí pro nejlepší žáky letní zájezd na Havaj, na Tenerife a do Splitu. Škola vybere 30 vynikajících žáků, ale nechce mezi nimi vybírat tři nejlepší. proto se losuje. První vylosovaný jede na Havaj, druhý na Tenerife a třetí do Splitu. Potom záleží na pořadí vylosovaných! Kolik je možných výběrů? Je to jednoduché. Prvního mohu vylosovat z 30 možností, druhého už jenom z 29 a třetího z 28 možností. Proto je celkem $30 \cdot 29 \cdot 28$ možných výsledků. Když vybíráme obecně k prvků z n a záleží na pořadí, máme

$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-k+1)$ možností.

Tento způsob výběru (nebo vzorec) se nazývá "**variace bez opakování**". Není nutné si ho pamatovat, logicky k němu vždycky dojdeme. Nicméně je to pojem, který se v kombinatorice zavedl. Také se zavedl pojem "**variace s opakováním**", což je případ, když se právě vylosované číslo opět vrací do osudí. V našem případě by to nemělo smysl, protože teoreticky by všechny tři zájezdy mohl získat jeden žák, nicméně by bylo $30 \cdot 30 \cdot 30$ možných losování. Obecně pro k vybíraných prvků z n prvků "s opakováním" (tj. "vracením" vybraného prvku zpět) bychom měli n^k možností. Když bychom měli tři zájezdy na Havaj, nezáleželo by na pořadí, vybírala by se skupina 3 studentů, takže to by bylo výše uvedené kombinační číslo 30 nad 3.

Příklad tu není zbytečně, protože uvedené kombinatorické úvahy se v maturitních příkladech dělají, i když se tam pojem variace nikdy nevyskytl.

12.4 Souhrn

Takže máme pojmy:

variace (k prvků z n) bez opakování: $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-k+1)$ možností.

variace (k prvků z n) s opakováním: n^k možností.

kombinace (k prvků z n): $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$ možností

permutace (n prvků) $n!$ možností.

12.5 Počítání s kombinačními čísly

V maturitních úlohách je mnoho kombinačních čísel, které musíme být schopni vypočítat.

Například v jedné z úloh máme vypočítat pravděpodobnost, kterou určíme jako

$$p = \frac{\binom{27}{4}}{\binom{30}{4}}.$$

Podle definice počítáme

$$\binom{27}{4} = \frac{27 \cdot 26 \cdot 25 \cdot 24 \cdot \mathbf{23 \cdot 22 \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \mathbf{23 \cdot 22 \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1}} = \frac{27 \cdot 26 \cdot 25 \cdot 24}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 17550$$

$$\binom{30}{4} = \frac{30 \cdot 29 \cdot 28 \cdot 27 \cdot \mathbf{26 \cdot 25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 22 \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \mathbf{26 \cdot 25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 22 \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1}} = \frac{30 \cdot 29 \cdot 28 \cdot 27}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 27405$$

$$\text{Potom } p = \frac{\binom{27}{4}}{\binom{30}{4}} = \frac{17550}{27405} = 0,64.$$

Jistě si všimneme, že část faktoriálu v čitateli se zkrátí s tím větším faktoriálem ve jmenovateli. Tím vzniklo **jednoduché pravidlo**, třeba 30 nad 4 je zlomek, kde nahoře jsou 4 čísla a dole také. Nahoře začínají třicítkou a jdou dolů, dole začínají jedničkou a jdou nahoru. Takže 30 nad 4 píšeme rovnou jako zlomek, kde jsou 4 čísla nahoře a 4 dole:

$$\binom{30}{4} = \frac{30 \cdot 29 \cdot 28 \cdot 27}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$$

Stejně tak

$$\binom{720}{2} = \frac{720 \cdot 719}{1 \cdot 2}, \quad \binom{7}{3} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3}$$

12.6 Trik

Když je dole velké číslo, počítáme to jinak:

$$\binom{30}{27} = \binom{30}{3}, \quad \text{obecně} \quad \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

Číslo 30 nad 27 bychom počítali jako zlomek s 27 čísly nahoře a 27 čísly dole, proto využijeme výše uvedený vzorec. Vzorec nám říká zhruba to, že když vybíráme skupinu 27 studentů, kteří půjdou na brigádu, tak je to stejné, jako když vybíráme skupinu 3 studentů, kteří nepůjdou na brigádu.

Příklad

Například v úloze 2017J_21 [CZVV] chtějí vypočítat podíl čísel A/B

$$A = 1000! \cdot 3!$$

$$B = 999! \cdot 5!$$

Mohli bychom to řešit jinak, ale ukažme si postup, kdy nevíme nic jiného, než výše uvedené definice.

$$\frac{A}{B} = \frac{1000! \cdot 3!}{999! \cdot 5!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 999 \cdot 1000 \cdot 3!}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 999 \cdot 5!} = \frac{1000 \cdot 3!}{5!} = \frac{1000 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = \frac{1000}{20} = 50$$

Příklad

V úloze 2015P_17 [CZVV] se má vypočítat rozdíl

$$\binom{n+1}{2} - \binom{n}{2}$$

Opět dosadíme podle definice:

$$\begin{aligned} \binom{n+1}{2} - \binom{n}{2} &= \frac{(n+1)!}{2! \cdot (n+1-2)!} - \frac{n!}{2! \cdot (n-2)!} = \\ &= \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n \cdot (n+1)}{2! \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-1)} - \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n}{2! \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-2)} = \\ &= \frac{n \cdot (n+1)}{2!} - \frac{(n-1) \cdot n}{2!} = \frac{n^2 + n}{2} - \frac{n^2 - n}{2} = n. \end{aligned}$$

12.7 Pravděpodobnost

Často je kombinatorická úloha zkombinována s pravděpodobností. Většinou jednoduše jako „jaká je pravděpodobnost, že ...“, a následuje popis nějakého jevu, nějakého výsledku apod. V drtivé většině případů lze onu pravděpodobnost spočítat jako

$$p = \frac{\text{počet všech příznivých výsledků}}{\text{počet všech možných výsledků}}$$

12.8 Kombinatorické úlohy

U kombinatorických úloh je důležité si pokud možno nakreslit jakýmkoliv způsobem zadání. Například je úloha, kde si trenér vybírá z 5 děvčat a 4 chlapců šestičlennou skupinu, kde mají být 3 dívky a 3 chlapci. Jakýmkoli, i triviálním, způsobem si situaci nakreslit a pak uvažovat. Například [VK]:

O O O O O X X X X

--	--	--	--	--	--

Nebo je úloha, kde v divadle se do první řady posadí 12 osob, ale 3 místa zůstanou volná. Postačí jednoduchý nákres, například:

				X						X	X		
--	--	--	--	---	--	--	--	--	--	---	---	--	--

Ve všech úlohách, kde se mají vybrat prvky z určité množiny, je zásadní otázka, jestli vybíráme ty prvky jako skupinu, kde nezáleží na pořadí nebo vybíráme prvky, jejichž vybírání má jiný význam.

13 PRAVDĚPODOBNOST A STATISTIKA

Čistě z tohoto tématu je 32 úloh z 822. Většina úloh vyžaduje znalost pouze tří následujících pojmů. Další pojmy z pravděpodobnosti a statistiky se v maturitě neobjevují!

13.1 Pojmy Modus, Medián a Průměr

Učební text je zde velmi krátký, protože v maturitních úlohách se nejvíce vyskytují jen tři pojmy. Velmi stručně lze říci, že

Modus je nejčastější hodnota

Medián je "prostřední" hodnota

Průměr je součet dělený počtem

Medián

Zádrhel u mediánu je, že hodnoty musí být v řadě srovnané od nejmenší k největší. Vůbec nezáleží na tom, jaké hodnoty jsou, jen musí být srovnané podle velikosti. Potom medián je přesně prostřední hodnota, pokud počet hodnot v řadě je lichý. U sudého počtu hodnot je medián průměr ze dvou prostředních hodnot. Medián nemusí být celé číslo, může to být jakékoliv číslo.

U všech úloh z pravděpodobnosti a kombinatoriky je velmi výhodné si situaci nakreslit.

Pomůže to rychlejšímu pochopení podstaty úlohy a řešení. A u maturity jde o čas.

Část příkladů z kombinatoriky a pravděpodobnosti se dá řešit prostým výčtem, žádnými složitými úvahami. Prostě vypíšeme všechny možnosti a zatrhneme ty příznivé.

13.2 Škrtačí úlohy v didaktickém testu z matematiky a možnost získat 5 bodů náhodným zaškrtačováním

V tomto odstavci ukážeme, že **náhodným zaškrtačováním odpovědí v tzv. škrtačích úlohách (většinou úlohy 16–26 z didaktického testu) lze získat v průměru 5,4 bodu.**

Vezměme například úlohy z testu z podzimu 2025 [CZVV]:

Úlohy 15-25 jsou tzv. „škrtačí“ úlohy, kdy student vybírá právě jednu z nabízených možností. Správná řešení (zaškrtačení) podle Cermatu:

15		max. 3 b.
15.1	A	3 podúlohy 3 b. 2 podúlohy 1 b. 1 podúloha 0 b.
15.2	A	
15.3	N	
16	E	2 b.
17	D	2 b.
18	E	2 b.
19	A	2 b.
20	E	2 b.
21	B	2 b.
22	C	2 b.
23	A	2 b.
24	C	2 b.
25		max. 4 b.
25.1	D	2 podúlohy 4 b. 1 podúloha 2 b.
25.2	A	

V úloze 15 jsou vždy dvě možnosti A/N, přičemž za právě 3 správné odpovědi jsou 3 body a za právě 2 správné odpovědi je 1 bod. Jinak 0 bodů. Víme, že správná odpověď je **AAN**. Nyní budeme správné odpovědi zaškrtnout náhodně! Takže s pravděpodobností

$\frac{1}{8}$ zvolíme odpověď **AAA** a získáme za ni 2 body, celkem tedy $2(\text{body}) \cdot \frac{1}{8} = 0,25$ bodu

$\frac{1}{8}$ zvolíme odpověď **AAN** a získáme za ni 3 bodů, celkem tedy $3(\text{body}) \cdot \frac{1}{8} = 0,375$ bodu

$\frac{1}{8}$ zvolíme odpověď **ANA** a získáme za ni 0 bodů, celkem tedy 0 bodu

$\frac{1}{8}$ zvolíme odpověď **ANN** a získáme za ni 2 body, celkem tedy $2(\text{body}) \cdot \frac{1}{8} = 0,25$ bodu

$\frac{1}{8}$ zvolíme odpověď **NAA** a získáme za ni 0 bodů, celkem tedy 0 bodu

$\frac{1}{8}$ zvolíme odpověď **NAN** a získáme za ni 2 body, celkem tedy $2(\text{body}) \cdot \frac{1}{8} = 0,25$ bodu

$\frac{1}{8}$ zvolíme odpověď **NNA** a získáme za ni 0 bodů, celkem tedy 0 bodu

$\frac{1}{8}$ zvolíme odpověď **NNN** a získáme za ni 0 bodů, celkem tedy 0 bodu

Součet bodů je 1,125, tedy náhodným zaškrtnutím odpovědí získáme v průměru 1,125 bodu.

Jiný výpočet: Je to jako hod osmistěnnou kostkou, která má na svých osmi stěnách napsány tyto body: 2, 3, 0, 2, 0, 2, 0, 0. Otázka je, když hodím náhodně kostkou, kolik v průměru mohu získat bodů?

Je to přesně aritmetický průměr z těch osmi hodnot neboli $\frac{2+3+0+2+0+2+0+0}{8} = \frac{9}{8} = 1,125$

Náhodnou odpovědí v úloze 15 tak získáme **1,125 bodu**.

Úlohy 16-24 jsou z hlediska pravděpodobnosti a dosažení bodů shodné.

Taková úloha (například úloha 16) má 5 možných odpovědí A, B, C, D, E, přičemž podle pravidel na první straně didaktického testu je **právě jedna odpověď správná**. Úloha 16 tak má 5 možných odpovědí A až E, z nichž jedna je správně. Náhodnou odpovědí tak získáme správnou odpověď s pravděpodobností $\frac{1}{5}$, přičemž za takovou odpověď získáme 2 body.

Tedy náhodnou odpovědí v úloze 16 získáme $\frac{1}{5} \cdot 2$ body = 0,4 bodu.

Náhodnou odpovědí v úloze 16 získáme 0,4 bodu.

Náhodnou odpovědí v úloze 17 získáme 0,4 bodu.

Náhodnou odpovědí v úloze 18 získáme 0,4 bodu.

Náhodnou odpovědí v úloze 19 získáme 0,4 bodu.

Náhodnou odpovědí v úloze 20 získáme 0,4 bodu.

Náhodnou odpovědí v úloze 21 získáme 0,4 bodu.

Náhodnou odpovědí v úloze 22 získáme 0,4 bodu.

Náhodnou odpovědí v úloze 23 získáme 0,4 bodu.

Náhodnou odpovědí v úloze 24 získáme 0,4 bodu.

V úloze 25 jsou dvě podúlohy, přičemž každá má právě jednu z odpovědí A až F, avšak žádné písmeno nesmí být použito dvakrát. Podle pravidel jsou možné pouze odpovědi, které použijí právě dvě písmena z A až F.

Za každou správnou odpověď jsou 2 body.

Správná odpověď v tomto případě byla D, A.

Všech možných odpovědí je $6 \cdot 5 = 30$, protože musíme použít dvě různá písmena:

- 1) Za odpověď AB obdržíme 0 bodů
- 2) Za odpověď AC obdržíme 0 bodů
- 3) Za odpověď AD obdržíme 0 bodů
- 4) Za odpověď AE obdržíme 0 bodů
- 5) Za odpověď AF obdržíme 0 bodů
- 6) Za odpověď BA obdržíme **2 body**
- 7) Za odpověď BC obdržíme 0 bodů
- 8) Za odpověď BD obdržíme 0 bodů
- 9) Za odpověď BE obdržíme 0 bodů
- 10) Za odpověď BF obdržíme 0 bodů
- 11) Za odpověď CA obdržíme **2 body**
- 12) Za odpověď CB obdržíme 0 bodů
- 13) Za odpověď CD obdržíme 0 bodů
- 14) Za odpověď CE obdržíme 0 bodů
- 15) Za odpověď CF obdržíme 0 bodů
- 16) Za odpověď DA obdržíme **4 body**
- 17) Za odpověď DB obdržíme **2 body**
- 18) Za odpověď DC obdržíme **2 body**
- 19) Za odpověď DE obdržíme **2 body**
- 20) Za odpověď DF obdržíme **2 body**
- 21) Za odpověď EA obdržíme **2 body**
- 22) Za odpověď EB obdržíme 0 bodů
- 23) Za odpověď EC obdržíme 0 bodů
- 24) Za odpověď ED obdržíme 0 bodů
- 25) Za odpověď EF obdržíme 0 bodů
- 26) Za odpověď FA obdržíme **2 body**
- 27) Za odpověď FB obdržíme 0 bodů

- 28) Za odpověď FC obdržíme 0 bodů
 29) Za odpověď FD obdržíme 0 bodů
 30) Za odpověď FE obdržíme 0 bodů

V průměru tak obdržíme $\frac{5 \cdot 0 + 2 + 4 \cdot 0 + 2 + 4 \cdot 0 + 4 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 4 \cdot 0 + 2 + 4 \cdot 0}{30} = \frac{20}{30} = 0,67$ bodu.

Náhodnou odpovědí v úloze 25 tak získáme 0,67 bodů.

Celkově náhodnou odpovědí v úlohách 15-25 získáme
 $1,125 \text{ bodu} + 9 \cdot 0,4 \text{ bodu} + 0,67 \text{ bodu} = 1,125 + 3,6 + 0,67 = 5,4$ bodu

Celkově náhodnou odpovědí v úlohách 15 - 25 získáme 5,4 bodu.

Většina maturitních testů je tohoto typu, který jsme právě zkoumali. Ve třídě 4.G se sedmi studenty jsem 8. 9. 2025 provedl experiment, kdy studenti zaškrtnali výsledky úloh v záznamovém archu náhodně. Poté byly tyto náhodné výsledky kontrolovány proti správnému řešení úloh, přičemž celkem sedm studentů získalo po řadě 9, 4, 5, 9, 5, 9, 5 bodů. Tedy v průměru byli studenti ještě o něco úspěšnější než zcela náhodný výběr, neboť **v průměru získal každý 6,57 bodu**. U maturitního testu je potřeba získat 17 bodů. Strategie je tedy za úlohy 1-14 získat alespoň 12 bodů.

Studenti nejsou hloupí a vědí, že když nějakou „škrtačí“ úlohu neumí nebo nestihnou, tak je lepší si v záznamovém archu alespoň něco tipnout. Výše uvedený výpočet tomu dává za pravdu.

14 SLOVNÍ ÚLOHY

Ke slovním úlohám v Tabulkách nenajdeme NIC. Z tohoto tématu je 71 úloh z 822. Jsou založeny na logickém myšlení, ale přesto máme **dvě velmi podstatné rady**, které vám umožní úlohy zvládat.

14.1 Dvě rady, jak řešit slovní úlohy

- Přečíst pozorně celý text a zjistit, co se chce vypočítat.
- **Označit neznámou nebo neznámé.**
 - Pozn.: To, co se chce vypočítat, v drtivé většině případů označíme jako hlavní neznámou. Neznámé označujeme mnemotechnicky, třeba počet hodin = h, čokoláda = č, šlehačka = š, nemusí to být x, y.
- **Postupně čteme zadání a podle toho sestavujeme rovnice pro označené neznámé, TEXT OBSAHUJE ROVNICE !!!**
- Rovnice vyřešíme
- Když to úloha umožňuje, kreslíme si vždy náčrt, který úlohu vizualizuje

Slovní úlohy jsou různorodé. Lze mezi nimi nalézt podobnosti, ale ne podobná řešení. Hodně záleží na slovíčkách. Každá formulace dává jinou rovnici. Proto jedinou pomůckou je taktika výše a logické uvažování.

15 PLANIMETRIE – N-úhelníky (výpočty stran a úhlů)

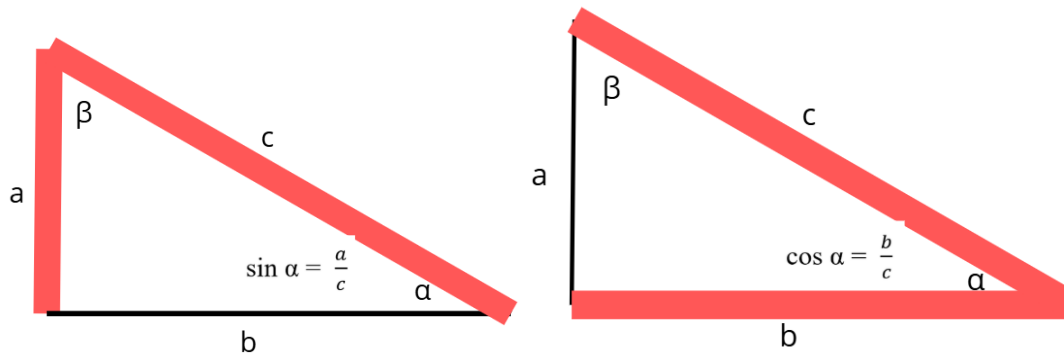
Z tohoto tématu je 58 úloh z 822. Většina úloh Cermatu používá v tomto tématu omezený okruh nutných vědomostí. Kromě úplně základních vlastností a pojmů (trojúhelník: těžnice,

kružnice opsaná a vepsaná, výška, Pythagorova věta, ..., lichoběžník, kosočtverec, kosodélník, ...) je bezpodmínečně nutné znát:

- sinovou a kosinovou větu,
- dva speciální pravoúhlé trojúhelníky, jeden 30 + 60 stupňů, druhý 45 + 45 stupňů. Z nich se odvodí hodnoty všech goniometrických funkcí pro 30, 45 a 60 stupňů, což je 95 % všech potřebných hodnot u maturity)
- umět na kalkulačce vypočítat velikost úhlu z hodnoty jeho sinu, cosinu nebo tangens,
- vědět, co znamená sin, cos, tg v pravoúhlém trojúhelníku podle následujících obrázků (pokud nevíte u maturity jistě, koukněte do tabulek):

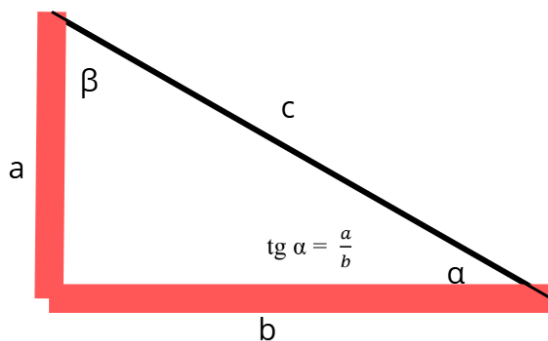
15.1 Sinus, kosinus a tangens

Obrázky [VK]:



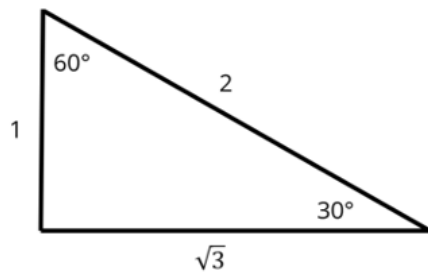
sinus α je poměr protilehlé odvěsny ku přeponě

kosinus α je poměr přilehlé odvěsny ku přeponě

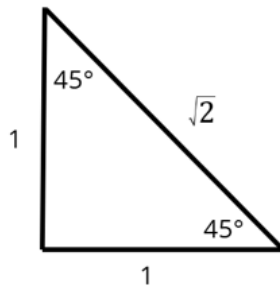


tangens α je poměr protilehlé odvěsny ku přilehlé odvěsně

15.2 Dva základní trojúhelníky



$$\begin{aligned} \sin 30^\circ &= \frac{1}{2} & \cos 30^\circ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin 60^\circ &= \frac{\sqrt{3}}{2} & \cos 60^\circ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$



$$\sin 45^\circ = \cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

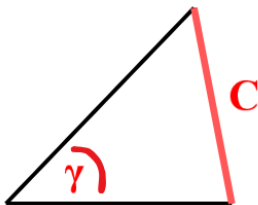
Obr.: Základní trojúhelník číslo 1 (nahore) a základní trojúhelník číslo 2 (dole) [VK]

15.3 Věta sinová a kosinová ([Tabulky])

Věta sinová

Pro každý trojúhelník ABC , jehož strany mají délky a, b, c a vnitřní úhly velikosti α, β, γ (obr. 9.17), platí

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$$

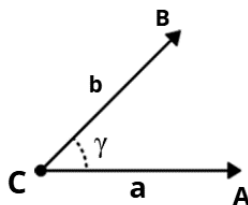


Příklady, které se řeší sinovou větou, je v maturitních úlohách opravdu hodně! **Zlaté pravidlo:** Kdykoliv v trojúhelníku známe stranu (c) a protilehlý úhel (γ), vede to skoro vždy na sinovou větu.

Věta kosinová

Pro každý trojúhelník ABC , jehož strany mají délky a, b, c a vnitřní úhly velikosti α, β, γ (obr. 9.17), platí

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma.$$



Užití kosinové věty je velmi časté. **Zlaté pravidlo:** Kdykoliv v trojúhelníku známe dvě strany (a , b) a úhel (γ), který svírají, můžeme vypočítat zbývající stranu (c) proti úhlu γ podle výše uvedeného vzorce. Nebo když známe tři strany, můžeme vypočítat úhel γ podle vzorce výše a úhly α , β podle analogických vzorců $b^2 = a^2 + c^2 - 2accos(\beta)$, $a^2 = b^2 + c^2 - 2bccos(\alpha)$.

15.4 Pythagorova věta ([Tabulky])

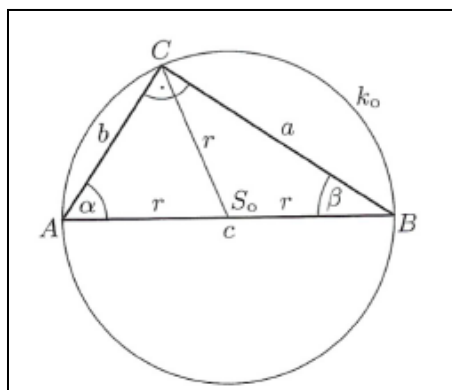
Je speciální případ kosinové věty,

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma.$$

kdy úhel $\gamma = 90^\circ$, takže $\cos(\gamma)=0$ a zbyde známé $c^2 = a^2 + b^2$. Kosinová věta je velmi účinná.

15.5 Thaletova věta ([Tabulky])

Je-li kružnice sestrojena nad průměrem AB , pak úhel u jakéhokoliv vrcholu C na kružnici je pravý.



16 PLANIMETRIE – PLOCHY

Z tohoto tématu je 51 úloh z 822. Téma „Planimetrie – plochy“ nevyžaduje nic zvláštního. Obsahy a obvody obdélníku, trojúhelníku, čtverce, lichoběžníku apod. Potřebné vzorce jsou v Tabulkách, ale nemá smysl je zde opakovat, protože to, co se využívá, jsou zcela základní znalosti ze základní školy.

Všechny úlohy jsou de facto slovní úlohy, které vyžadují nějaký vtíp a základní vzorce. Nelze zde najít nějaké podobnosti, proto na vybraných řešených úlohách ukazujeme pouze různé typy „vtípu“, který je potřeba k řešení.

17 STEREOMETRIE

Z tohoto tématu je 76 úloh z 822. Ke stereometrii najdeme vzorečky v Tabulkách. Je to ale jen pár pojmů a vzorečků, které stojí za to se naučit. V maturitním testu budou tedy asi 2–3 úlohy. Jedná se o **povrchy a objemy všech těles**, probíraných ve škole, tj. hranol, krychle, jehlan, kužel, koule a jejich části. Je nezbytné znát tyto vzorce nebo vědět, kde jsou uvedeny v Tabulkách.

17.1 Několik rad

Dobré je si pamatovat, že jehlan a kužel mají třetinový objem než hranol a válec.

U válce a kužele je nezbytné **rozlišovat povrch podstav a povrch pláště**, protože v tabulkách se objevují dohromady, zatímco v úlohách je nutné povrchy často oddělovat a počítat zvlášť.

Takže například povrch válce je v tabulkách uveden jako

$$S = 2\pi r(r + v)$$

nebo

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi r v$$

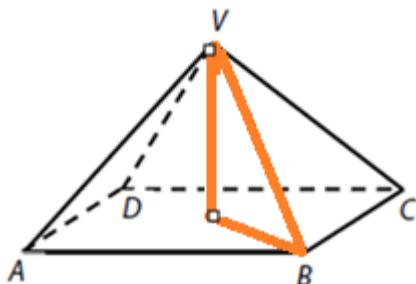
jenže to je povrch válce se dvěma podstavami ($2\pi r^2$) a pláštěm ($2\pi r v$). Když máme ale vypočítat povrch vázy, tak ta má podstavu jen jednu, čili povrch bude $S = \pi r^2 + 2\pi r v$!!! Když budeme chtít počítat povrch vázy i s vnitřkem (tj. kdybychom chtěli vázu obarvit zvenčí i zevnitř), pak povrch bude mít jednu podstavu, ale dva pláště:

$$S = \pi r^2 + 2 \cdot 2\pi r v = \pi r^2 + 4\pi r v$$

takže je nutno nepoužívat vzorečky mechaniky.

Typické úlohy na objem těles jsou takové, že se vypočte **plocha podstavy a násobí se výškou** tělesa. Pokud se jedná o kužel nebo jehlan, je objem jedna třetina válce nebo hranolu. Často mají podstavy různý tvar a jejich plocha se počítá zvlášť.

U jehlanu, hranolu, ale i kužele nebo krychle hraje úlohu hrana, výška, úhlopříčka podstavy, tělesová úhlopříčka apod. Tyto **tělesové úsečky tvoří společně různé trojúhelníky, zejména pravouhlé**, čehož se využívá k výpočtu neznámých potřebných rozměrů.



Obr.: [VK]

Statistiku použitých těles v příkladech ze stereometrie ukazuje tabulka [VK]:

válec	koule	kulový vrchlík	kulový pás	jehlan	kužel	kvádr	hranol	krychle	různé
26	14	2	1	11	10	9	7	3	1

17.2 Přehled vzorců ([Tabulky])

KRYCHLE	$V = a^3$ $S = 6a^2$ $u_s = a\sqrt{2}$ (stěnová úhlopříčka) $u_t = a\sqrt{3}$ (tělesová úhlopříčka)
KVÁDR	$V = abc$ $S = 2ab + 2ac + 2bc = 2(ab + ac + bc)$ $u_t = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$
HRANOL	$V = S_p \cdot v$ $S = 2 \cdot S_p + Q$

JEHLAN	$V = \frac{1}{3} S_p \cdot v$ $S = S_p + Q$
VÁLEC	$V = \pi r^2 v$ $S = 2\pi r^2 + 2\pi r v = 2\pi r \cdot (r + v)$
KUŽEL	$V = \frac{1}{3} \pi r^2 v$ $S = \pi r^2 + \pi r s$
KOULE	$V = \frac{4}{3} \pi r^3$ $S = 4\pi r^2$

18 GRAFY RŮZNÝCH FUNKCÍ

18.1 Úvod

Z 822 maturitních úloh bylo 101 úloh na toto téma (parabola 19, přímka 16, hyperbola 14, logaritmus 29, mocnina 23), proto se vyplatí se pár věcí z tohoto textu naučit. Tato kapitola nemá přílohy, protože ty jsou rozděleny do dílčích kapitol parabola, hyperbola, logaritmus, mocnina. Téma má mnoho společného s jednotlivými funkcemi: přímkou, parabolou, hyperbolou, logaritmem, mocninami a úlohami s těmito funkcemi, například rovnicemi. Proto se zákonitě tato kapitola bude prolínat s kapitolami, věnovanými přímkce, parabole, hyperbole, logaritmu a mocninám, ale tato kapitola je zaměřena na GRAFY a pojmy ke grafům. Návody a rady v této kapitole se týkají grafů všech funkcí. Třeba průnik grafu s osou x nebo y nebo definiční obor nebo obor hodnot by se musel vysvětlovat u každé funkce zvlášť, přitom mnoho příkladů je zaměřeno právě na tyto společné prvky. Dvě hlavní rady pro toto téma:

Pokud si nebudete vědět rady u funkcí, vždycky si můžete nakreslit pár bodů, někdy stačí dva, například si udělat tabulku [VK]:

x	1	2	-1	-2
y	1	1/2	-1	-1/2

1. Užitečné vzorce a definice jsou v tabulkách, kde je přímo kapitola FUNKCE.
2. Při řešení grafických úloh vždy využijeme všechny body grafu, které jsou uvedené nebo nakreslené v zadání příkladu, včetně asymptot, průsečíků s osami, apod., protože všechny mají sloužit k řešení.

18.2 Funkce, graf funkce

Občas se může objevit otázka, zda nějaký graf je grafem funkce. Funkce, na rozdíl od křivek, má pro každý prvek jen jednu hodnotu. Takže třeba kružnice nemůže být graf funkce. Často se objevují dotazy na definiční obor D_f a obor hodnot H_f funkce f . Ty jsou definovány v tabulkách.

18.3 Definiční obor funkce (D_f)

Definiční obor D_f funkce f je ta množina, na níž je funkce definována, tj. má na každém prvku z definičního oboru určitou hodnotu. Například funkce $y = x^2$ má definiční obor všechna reálná čísla, celou reálnou osu. Naproti tomu funkce tg (nové označení \tan), $y = \text{tg}(x)$ není definována například pro hodnoty $x = \frac{\pi}{2}$ a $x = -\frac{\pi}{2}$ (a samozřejmě i o jejich periodické posuny o celočíselné násobky π). $D_f = \mathbf{R} \setminus \{\pm \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi; k \in \mathbf{Z}\}$.

Příklad: V maturitním příkladu 2024J_22 [CZVV] bylo toto zadání:

Předpis funkce f pro všechna x z definičního oboru funkce f je:

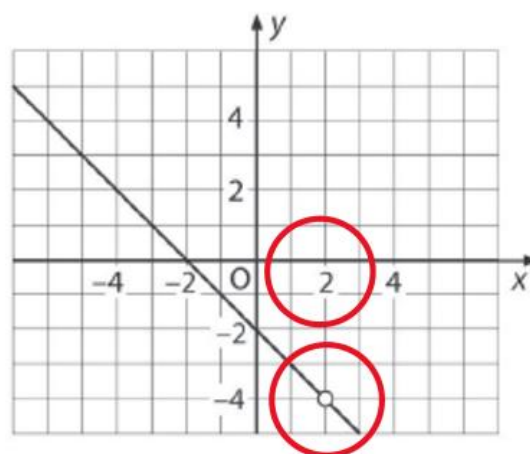
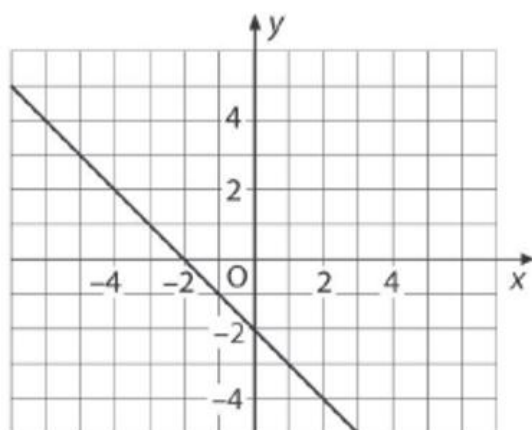
$$y = \frac{x^2 - 4}{2 - x}$$

Který z následujících grafů je grafem funkce f v kartézské soustavě souřadnic Oxy ?

A bylo na výběr z pěti možností. První trik byl v tom, že to není ani parabola, i když obsahuje x^2 , ani hyperbola, i když obsahuje zlomek typu $\frac{\text{něco}}{x}$. Zlomek lze totiž zkrátit: $y = \frac{x^2 - 4}{(-1)(x-2)} = \frac{(x+2)(x-2)}{(-1)(x-2)} = \frac{x+2}{-1} = -x - 2$. Řešení je evidentně přímka. Omyl! Tak to je chyták, protože opravdu podmínka krácení ve vzorci nahoře je skutečně $x \neq 2$. To znamená, že bod 2 je vyňat z definičního oboru funkce f :

$$D_f = \mathbf{R} \setminus \{2\} = (-\infty; 2) \cup (2; +\infty).$$

a grafem je sice přímka, ale jeden bod $[2; -4]$ tam chybí! Proto správné řešení je vpravo.



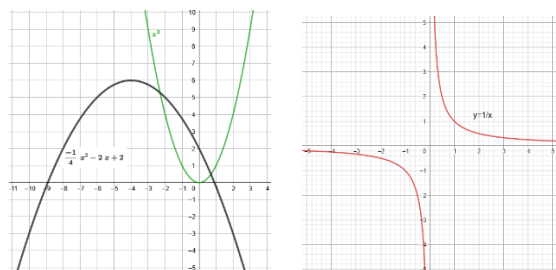
Obr. [CZVV] a [VK]

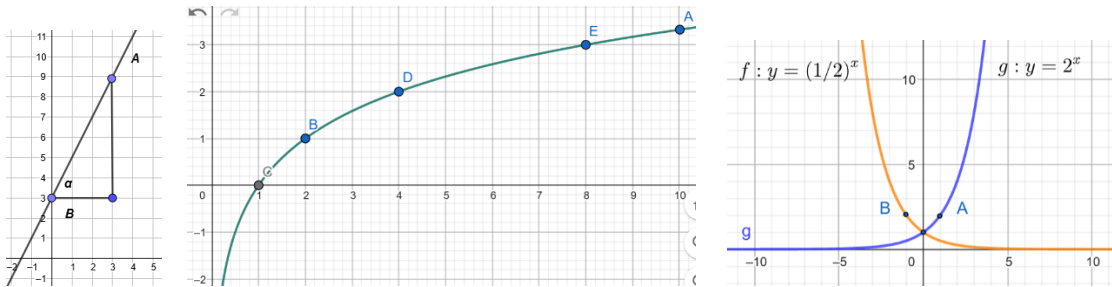
18.4 Obor hodnot funkce (H_f)

Obor hodnot H_f funkce f je definován jako množina všech hodnot, které nabývá funkce f . Například funkce $y = x^2$ nabývá jen hodnot od nuly výše, až do nekonečna, čili $H_f = [0; +\infty)$. Naproti tomu funkce $y = \text{tg}(x)$ nabývá hodnot od $-\infty$ do $+\infty$, tj. $H_f = \mathbf{R}$. Funkce f na obrázku (B) výše nabývá všech hodnot, ale vyjma bodu -4 (protože bod $x = 2$ je vyňat z definičního oboru), tj. $H_f = \mathbf{R} \setminus \{-4\} = (-\infty; -4) \cup (-4; +\infty)$.

18.5 Jaké se objevují grafy v úlohách?

Každou funkci probereme ve zvláštní kapitole: přímka, parabola, hyperbola, logaritmus, exponenciála. Tady si uvedeme souhrn a společné prvky. Základní tvary funkcí jsou tyto: parabola, hyperbola, přímka, logaritmus a mocnina:





Obr.: [VK]

19 PARABOLA

Parabola je grafem kvadratické funkce $f: y = ax^2 + bx + c$. Je-li a kladné, parabola je obrácená vzhůru, je-li záporné, je obrácená dolů. Hodnoty koeficientu $a = -\frac{1}{4}, -2, +\frac{1}{4}, +5$ určují zúžení nebo rozšíření paraboly. Výhodný je tzv. vrcholový tvar paraboly $y = a(x - m)^2 + n$. Pokud je parabola zapsaná v tomto tvaru, tak vrchol paraboly je přesně v bodě $V[m; n]$. Kořenový zápis paraboly $y = a(x - x_1)(x - x_2)$. zase určuje průsečíky paraboly s osou x , tj. kořeny

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

rovnice $ax^2 + bx + c = 0$. Průsečík paraboly s osou y zjistíme snadno, protože stačí dosadit $x = 0$ do rovnice paraboly.

19.1 Definice paraboly, vrchol, zúžení a protažení a další její vlastnosti

Definici paraboly najdete v tabulkách.

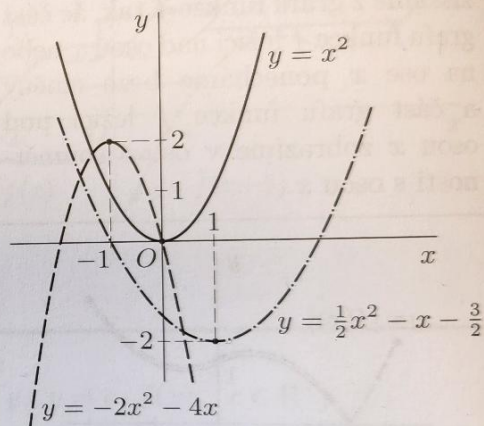
Definice obecného tvaru paraboly

Parabola je grafem kvadratické funkce $f: y = ax^2 + bx + c$, kde a, b, c jsou reálná čísla (koeficienty), přičemž koeficient a je nenulový.

Poznámka. Kdyby koeficient a byl nula, funkce by byla lineární, a jejím grafem by byla přímka. Koeficient a se proto nazývá kvadratický koeficient, koeficient b se nazývá lineární koeficient a koeficient c se nazývá absolutní člen.

Vrchol paraboly, definiční obor, obor hodnot určíme jednoduše podle vzorců z Tabulky, viz obr. Vzorce lze použít mechanicky, v následujícím jsou důležité pojmy pro dokreslení a pochopení grafu paraboly, protože to zásadně urychlí řešení maturitních úloh.

Kvadratická funkce	
$f: y = ax^2 + bx + c, \quad a, b, c \in \mathbb{R}, \quad a \neq 0$	
$D_f = \mathbb{R}, \quad H_f = \begin{cases} \left\langle c - \frac{b^2}{4a}, +\infty \right\rangle, & \text{pokud } a > 0 \\ \left(-\infty, c - \frac{b^2}{4a} \right], & \text{pokud } a < 0 \end{cases}$	
Graf: parabola s vrcholem $V\left[-\frac{b}{2a}, c - \frac{b^2}{4a}\right]$	
$a > 0 \Rightarrow \begin{cases} f \text{ je omezená zdola} \\ f \text{ má v bodě } x = -\frac{b}{2a} \text{ minimum} \end{cases}$	
$a < 0 \Rightarrow \begin{cases} f \text{ je omezená shora} \\ f \text{ má v bodě } x = -\frac{b}{2a} \text{ maximum} \end{cases}$	



Obr.: Definice paraboly (kvadratické funkce) [Tabulky]

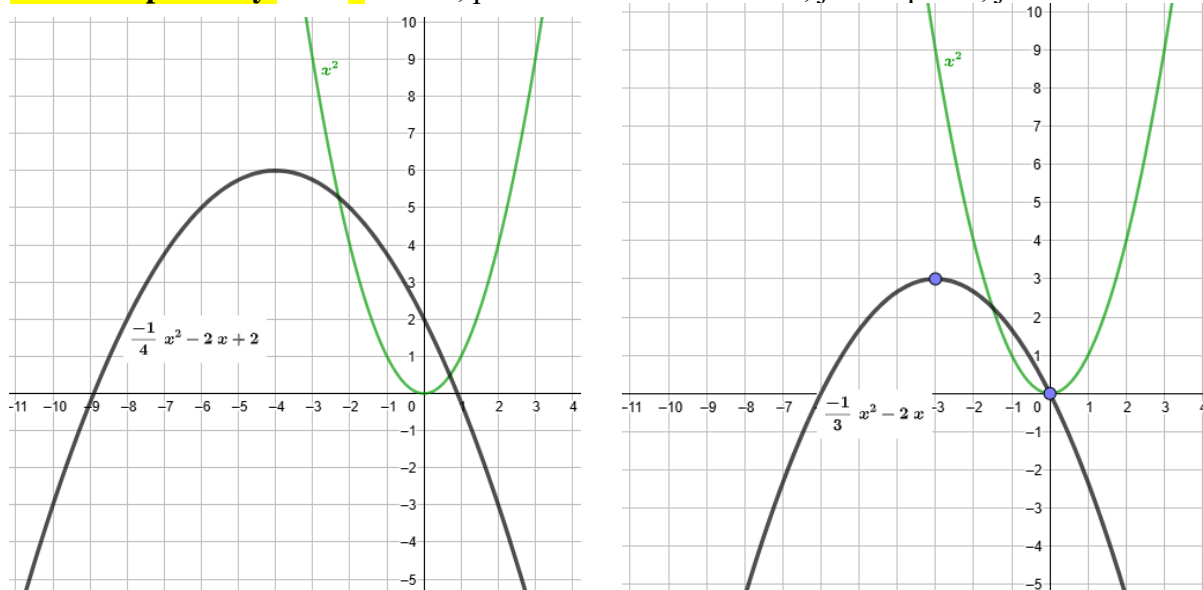
Vrchol paraboly, jak vidíme na obrázku, je nejnižší bod (minimum) nebo nejvyšší bod (maximum), podle toho, jestli koeficient a je kladný nebo záporný. Jeho souřadnice můžeme jednoduše získat dosazením do vzorce v Tabulce: parabola $f: y = ax^2 + bx + c$ má vrchol v bodě

$$V\left[-\frac{b}{2a}, c - \frac{b^2}{4a}\right].$$

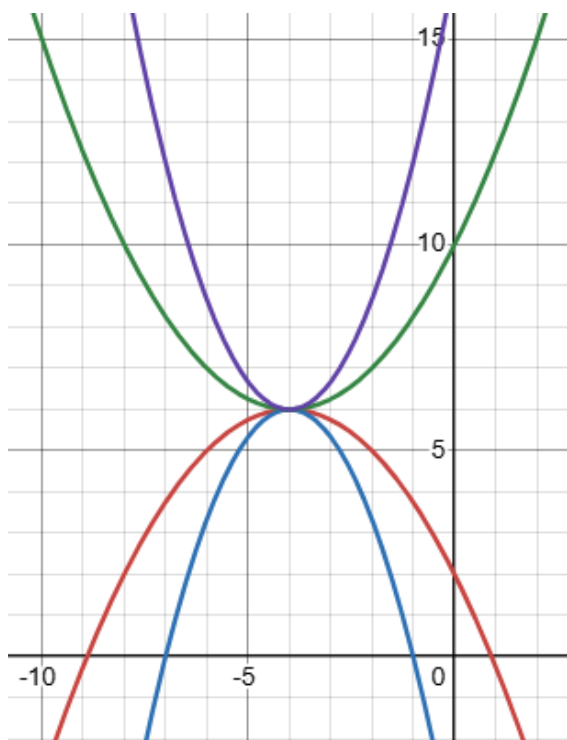
Pokud souřadnice vrcholu označíme **$V[m; n]$, pak** má parabola tzv. **vrcholový tvar** **$y = a(x - m)^2 + n$** . Vidíme, že v x -ové souřadnici $x = m$ je opravdu hodnota paraboly $y = n$. a obrácení paraboly je pak dáno hodnotou koeficientu a .

Maximum nebo minimum paraboly se nabývá ve vrcholu paraboly, a která varianta nastane, je dáno znaménkem koeficientu a .

Obrácení paraboly. Je-li a kladné, parabola obrácená vzhůru, je-li záporné, je obrácená dolů.



Obr.: Kladný a záporný koeficient u kvadratického členu ax^2 [VK]



1	$y = -\frac{1}{4}x^2 - 2x + 2$
2	$y = -\frac{2}{3}x^2 - \frac{16}{3}x - \frac{14}{3}$
3	$y = \frac{1}{4}x^2 + 2x + 10$
4	$y = \frac{2}{3}x^2 + \frac{16}{3}x + \frac{50}{3}$

Obr.: [VK]

Vrchol parabol je vždy v bodě $V[-4; 6]$, ale koeficienty $a = -\frac{1}{4}, -\frac{2}{3}, +\frac{1}{4}, +\frac{2}{3}$ určují zúžení, rozšíření nebo otočení paraboly.

Zúžení nebo protažení paraboly je dáno velikostí koeficientu a .

Parabola je souměrná podle osy, která je rovnoběžná s osou y .

19.2 Kořeny a rozklad na kořenové činitele paraboly

Průsečíky paraboly $f: y = ax^2 + bx + c$ s osou x jsou **kořeny paraboly**, neboť y -ová souřadnice je v těchto bodech nula. Kořeny se vypočítají podle klasického vzorce

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

a jsou to právě průsečíky paraboly s osou x . Kořeny jsou mj. souměrné podle osy souměrnosti paraboly. **Osa souměrnosti prochází vrcholem paraboly** a má proto tvar $x = -\frac{b}{2a}$, což je x -ová souřadnice vrcholu paraboly.

19.3 Kořenový zápis paraboly

Pokud známe kořeny paraboly, ať už z obrázku nebo zadání maturitní úlohy, můžeme rovnici paraboly napsat pomocí **rozkladu na kořenové činitele** takto:

$$y = a(x - x_1)(x - x_2).$$

Jedinou neznámou je zde koeficient a , který rozhoduje o tom, jak je parabola otočená a jak je zúžená nebo rozšířená, a tím pádem rozhoduje i o souřadnicích vrcholu. Například pro kořeny 5 a -6 máme $y = a(x - 5)(x + 6)$. Jedinou neznámou je zde koeficient a . K jeho určení potřebujeme ještě třetí bod paraboly. Může to být jakýkoliv bod (kromě již známých kořenů),

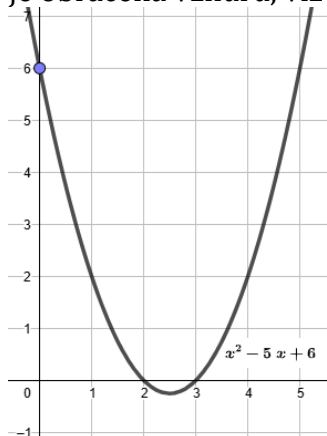
protože pak stačí za x , y dosadit jeho souřadnice do rovnice $y = a(x - x_1)(x - x_2)$ a z ní vypočteme jedinou zbývající neznámou a .

V maturitních otázkách se často vyskytují **kořeny celočíselné**. Ty můžeme rychle odhadnout **pomocí Vietových vzorců**. Připomeňme si jen na příkladu, že parabola

$$y = x^2 - 5x + 6$$

bude mít rozklad na kořenové činitele $y = (x - 2)(x - 3)$, protože absolutní člen 6 se dá rozložit jako $6 = (-2)(-3)$ a lineární člen je $-5 = -2 - 3$. Kořeny budou tedy 2 a 3.

To nám pomůže v tom, že parabolu si můžeme načrtnout. Prochází body 2 a 3 na ose x a je obrácená vzhůru, viz obr.

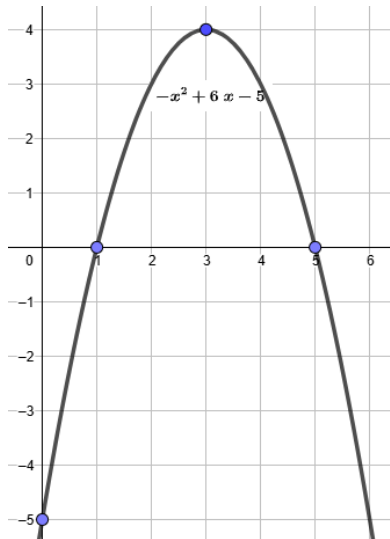


Obr.: Parabola $y = x^2 - 5x + 6$. [VK]

Zároveň brzy přijdeme na **průsečík paraboly s osou y** , protože stačí dosadit $x = 0$ do rovnice paraboly. Podobně parabola

$$y = -x^2 + 6x - 5$$

bude mít rozklad na kořenové činitele $y = -(x - 1)(x - 5)$, protože po vytknutí -1 máme $y = (-1)(x^2 - 6x + 5)$ a uvnitř závorky můžeme absolutní člen 5 rozložit jako $5 = 1 \cdot 5$ a lineární jako $-6 = -1 - 5$. Kořeny budou tedy 1 a 5. To nám pomůže v tom, že parabolu si můžeme načrtnout. Prochází body 1 a 5 na ose x a je obrácená dolů, viz obr.



Obr.: parabola $y = -x^2 + 6x - 5$ [VK]

Průsečík paraboly s osou y je ten bod paraboly, který má x-ovou souřadnici nulovou, proto y-ovou souřadnici zjistíme dosazením $x = 0$ do rovnice $f: y = ax^2 + bx + c = c$ a máme průsečík $P[0, c]$ a zároveň hodnotu absolutního členu c .

19.4 Vrcholový tvar paraboly

Vrcholový tvar paraboly $y = a(x - m)^2 + n$

Když budeme řešit maturitní úlohu, můžeme dospět ke tvaru paraboly sami možná rychleji, asi tak jako když odhadneme kořeny rovnice pomocí Vietových vzorců dříve, než bychom je vypočítali. Postup ukážeme na dvou příkladech. Princip je v tom, že rovnici paraboly $y = ax^2 + bx + c$ můžeme jednoduchými úpravami (vytknutí kvadratického koeficientu, sčítání a odčítání) převést na tzv. **vrcholový tvar paraboly $y = a(x - m)^2 + n$** . Pokud je parabola zapsaná v tomto tvaru, tak **vrchol paraboly je přesně v bodě $V[m; n]$**

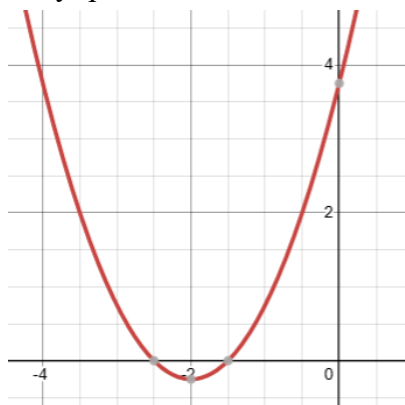
$$V \left[-\frac{b}{2a}, c - \frac{b^2}{4a} \right].$$

Navíc víme, že když hodnota koeficientu a bude kladná, parabola bude obrácená nahoru, když záporná, tak dolů. Když bude hodnota koeficientu a menší než 1, tak parabola bude smršťená, a když větší než 1, tak bude naopak „natažená“. Převodem na uvedený tvar tak máme jasnou představu, jak parabola vypadá a jak ji zakreslit. Je otázka šikovnosti, jak odhadnout hodnotu m a n , ale dvě z možností jsou uvedeny v příkladech.

Příklad. Upravte rovnici paraboly $y = x^2 + 4x + \frac{15}{4}$ na vrcholový tvar.

$$\text{Vypočteme vrchol podle vzorce } V = \left[-\frac{b}{2a}, c - \frac{b^2}{4a} \right] = \left[-\frac{4}{2}, \frac{15}{4} - \frac{4^2}{8} \right] = \left[-2, -\frac{1}{4} \right].$$

a dosadíme do rovnice $y = a(x - m)^2 + n$, takže dostaneme výsledný tvar $y = (x + 2)^2 - \frac{1}{4}$. Parabola je ve vrcholu obrácená nahoru, protože koeficient u x^2 je kladný (1). Parabolu nakreslíme tak, že se přesuneme do bodu V a tam kreslíme parabolu $y = x^2$ jakoby vrchol V byl počátek souřadnic. Na obrázku vidíme celou parabolu, i její kořeny $-2 \pm \frac{1}{2}$.

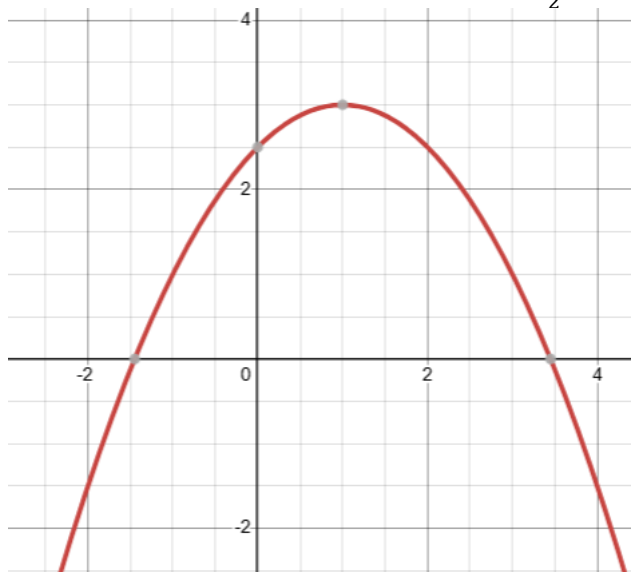


Obr.: Parabola $y = (x + 2)^2 - \frac{1}{4}$ [VK]

Příklad. Nakreslete parabolu $y = -\frac{1}{2}(x - 1)^2 + 3$.

Vrchol $V[+1; 3]$ si nyní představíme jako kdyby to byl počátek souřadnic $O[0; 0]$ a v tomto bodě nakreslíme parabolu $y = -\frac{1}{2}x^2$. Takže nejdříve tam nakreslíme parabolu $y = x^2$, pak ji smršťíme na polovinu $y = \frac{1}{2}x^2$, poté ji překloupíme přes osu x směrem dolů, čímž

máme $y = -\frac{1}{2}x^2$. A to je celé. Proč? Tím, že jsme parabolu kreslili v „počátku“ $[+1; 3]$ místo $[0; 0]$, tak jsme se ve vzorci $y = -\frac{1}{2}x^2$ postarali o posun jak v souřadnici x , tak v y .



Obr.: Parabola $y = -\frac{1}{2}(x - 1)^2 + 3$, [VK]

Poznámka. Vrchol paraboly má x-ovou souřadnici uprostřed kořenů, na ose souměrnosti, což se někdy hodí. Když známe kořeny, můžeme vypočítat x-ovou souřadnici vrcholu paraboly, protože je uprostřed:

$x_V = \frac{x_1 + x_2}{2}$ a tím pádem můžeme vypočítat i y-ovou souřadnici vrcholu, když za x dosadíme do rovnice paraboly $y_V = f(x_V)$. Tento bod pak můžeme nakreslit, přidat k tomu kořeny, a tím rychleji nakreslit celou parabolu.

19.5 Příklady parabol z maturit

V maturitách se objevily tyto paraboly. Pokud je chcete nakreslit, nejprve nakreslete vrchol paraboly a pak parabolu $y = x^2$ zužujte/ natahujte/ převraťte podle koeficientu u x^2 .

$$f: y = x^2$$

$$g: y = (x - 3)^2$$

$$f: y = (x - 3)^2 + 2$$

$$h: y = x^2 + 2$$

$$f: y = \frac{1}{2}x^2$$

$$f: y = \frac{1}{2}(x - 3)^2$$

$$h: y = \frac{1}{2}(x - 3)^2 + 2$$

$$f: y = 2(x - 3)^2 - 1$$

$$f: y = -x^2$$

$$h: y = -(x - 3)^2$$

$$g: y = -(x - 4)^2 + 1$$

$$f: y = -x^2 - 3$$

$$g: y = -\frac{1}{2}x^2$$

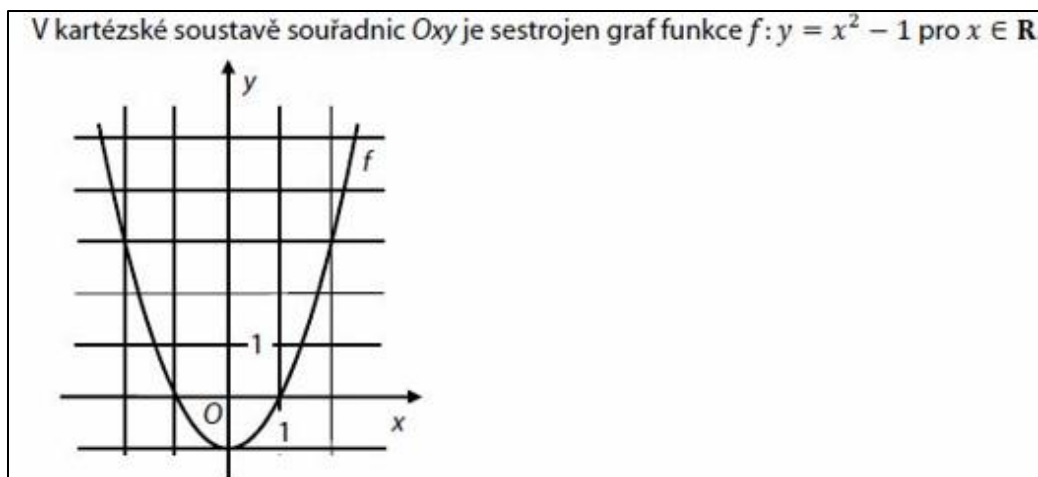
$$f: y = -\frac{1}{2}(x - 2)^2$$

$$g: y = -\frac{1}{2}(x + 3)^2 - 1$$

$$g: y = -2(x - 1)^2 - 1$$

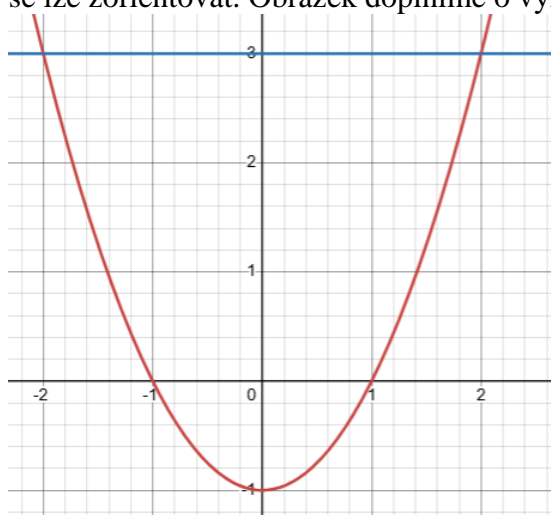
19.6 Příklad z maturity, který dělá potíže

V maturitní úloze číslo 11 z podzimu 2015 [CZVV] byla tato úloha, která studentům nějakým způsobem vadí a řešení dělá potíže.



Určete všechny hodnoty proměnné x , pro něž je $f(x) \leq 3$.

Obrázek je nakreslen tak, že musíme chvíli hledat, ke kterému bodu patří počátek, nicméně se lze zorientovat. Obrázek doplníme o vyznačení bodů na osách



Obr.: [VK]

a také vyznačíme přímku $y = 3$. Problém právě dělá otázka, pro jaké hodnoty proměnné x je $y = f(x)$ menší nebo rovna 3. Podle obrázku vidíme, že x patří do intervalu $[-2; 2]$, protože v tomhle intervalu červená čára leží pod hodnotou $y = 3$.

19.7 Příklad, kdy známe kořeny paraboly

Pokud známe kořeny paraboly, ať už z obrázku nebo zadání maturitní úlohy, můžeme rovnici paraboly napsat takto: $y = a(x - x_1)(x - x_2)$. Například pro kořeny 2 a -3 máme $y = a(x - 2)(x + 3)$. Pro dokončení zápisu paraboly potřebujeme ještě další informaci, protože parabol, procházejících přes kořeny 2 a -3 je nekonečně mnoho. Postačí ale souřadnice dalšího bodu na parabole a koeficient a snadno určíme.

19.8 Příklad, kdy známe vrchol

Pokud známe vrchol paraboly $V[m; n]$, můžeme napsat její vrcholový tvar $y = a(x - m)^2 + n$. Například pro vrchol $V[-1; 5]$ máme $y = a(x + 1)^2 + 5$. Pro dokončení zápisu paraboly potřebujeme opět nějakou další informaci, protože parabol s vrcholem $V[-1; 5]$ je nekonečně mnoho. Opět postačí souřadnice dalšího bodu na parabole a koeficient a snadno určíme.

19.9 Příklad, kdy známe kořeny i vrchol

Ve výše uvedeném maturitním příkladu byla parabola nakreslena tak, že byly vidět kořeny i vrchol. Kořeny byly -1 a 1, takže máme rovnici paraboly $y = a(x - 1)(x + 1)$.

Další informací byly souřadnice vrcholu $[0; -1]$. Takže můžeme dosadit do rovnice $y = a(x - 1)(x + 1)$ a dostáváme $-1 = a(0 - 1)(0 + 1)$ a odtud $a = 1$.

20 HYPERBOLA

Z tohoto tématu je 14 úloh Z 822.

20.1 Nejčastější vzorec hyperboly

Vzorec hyperboly, který se objevuje v maturitních úlohách nejčastěji, je

$$y = \frac{1}{x}$$

případně

$$y = \frac{k}{x} \quad \text{pro libovolné nenulové } k \in \mathbf{R},$$

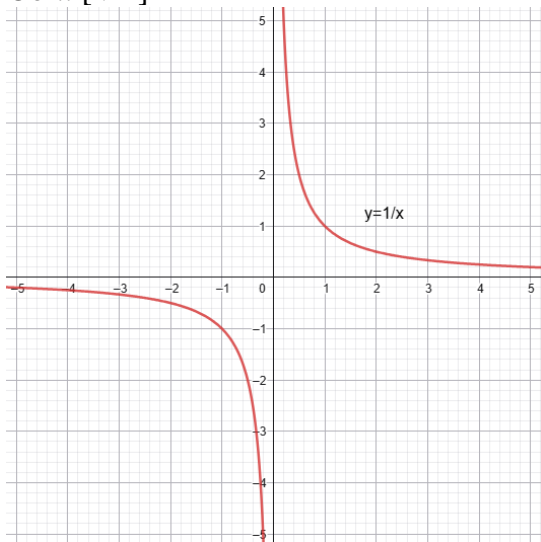
například


$$y = \frac{2}{x}, y = \frac{4}{x}, y = \frac{-1}{x}, y = \frac{-2}{x}, y = \frac{-4}{x}, y = \frac{10}{x}, y = \frac{-\frac{1}{2}}{x} = \frac{-1}{2x}, y = \frac{-2}{7x},$$

viz obrázky níže. Opět **platí pravidlo, že když si nevíme rady, vypočítáme si pár bodů a nakreslíme je**. Pak dokreslíme už zbytek. Takže u $1/x$ vypočteme pár bodů a zakreslíme:

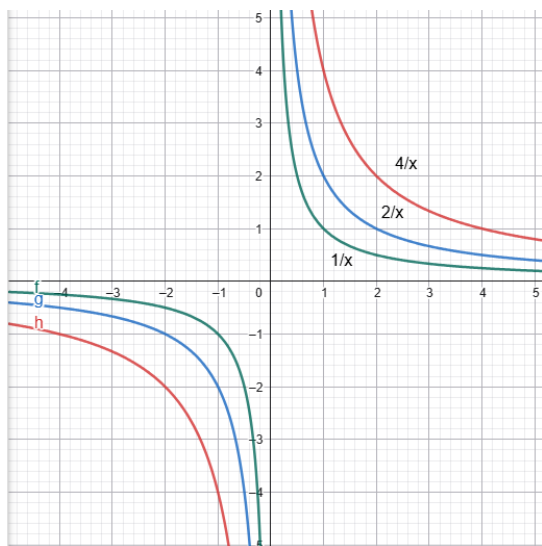
x	1	2	1/2	-1/2	-1	-2
y	1	1/2	2	-2	-1	-1/2




Obr.: [VK]



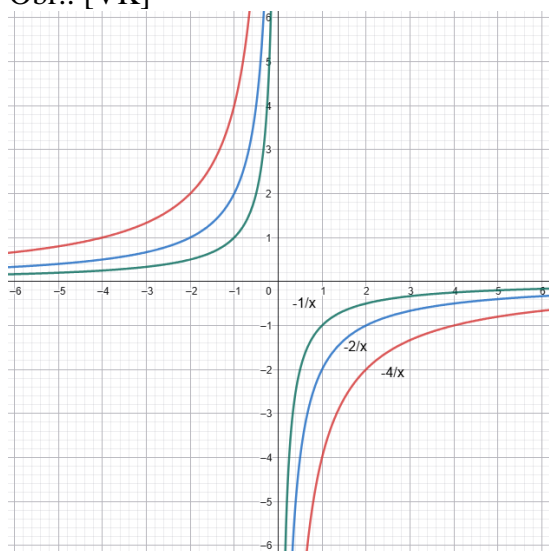
 $f: y = \frac{1}{x}$




Obr.: [VK]



	$f: y = \frac{1}{x}$
	$g: y = \frac{2}{x}$
	$h: y = \frac{4}{x}$

Obr.: [VK]



	$f: y = -\frac{1}{x}$
	$g: y = -\frac{2}{x}$
	$h: y = -\frac{4}{x}$

Obr.: [VK]

Jak vidíme, koeficient k ve vzorci $f: y = \frac{k}{x}$ způsobuje natažení (např. $k = 2$) nebo smrštění (např. $k = \frac{1}{2}$) hyperboly nebo její převrácení podle osy x (např. $k = -\frac{1}{2}, -2$).

20.2 Varianty hyperbol s posunutím středu hyperboly

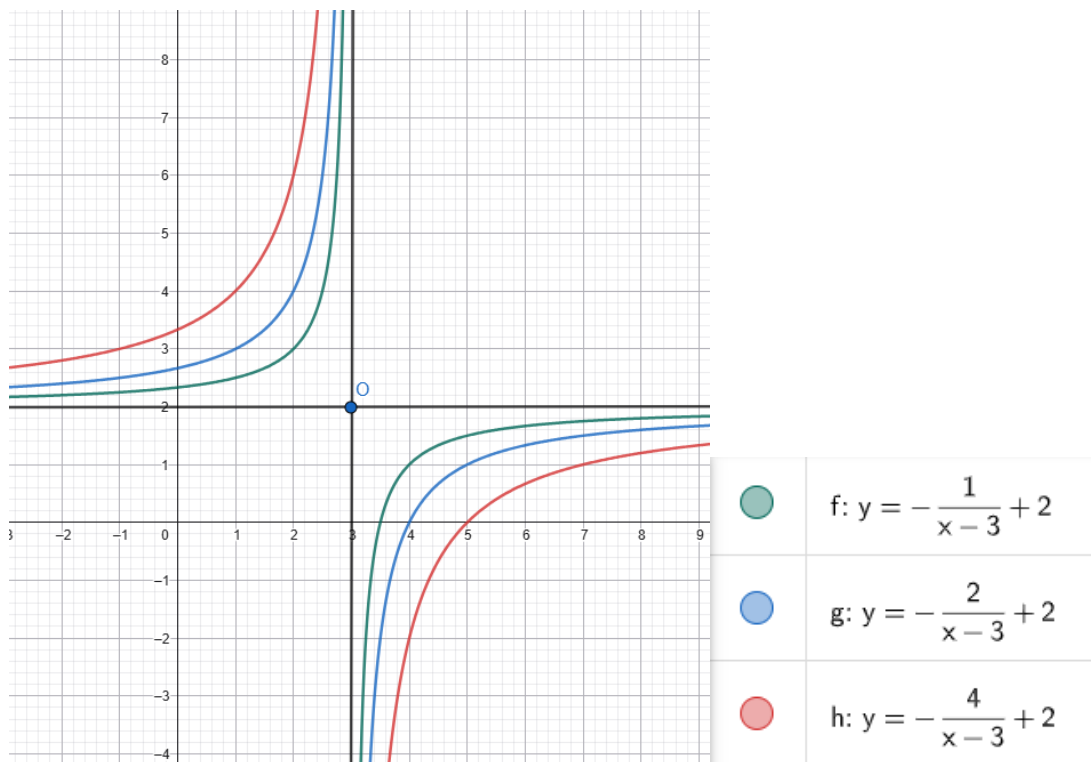
Občas se v maturitních otázkách vyskytne hyperbola s obecným zápisem

$$f: y = \frac{k}{x - m} + n$$

neboli $y - n = \frac{k}{x - m}$, čili se jedná o posun **středu hyperboly**, a to do bodu $S[m, n]$. Je to nový bod, kde se protínají asymptoty hyperboly, jinak vše zůstává stejné. Například

$$y = \frac{1}{x - 3}, y = \frac{1}{x - 3} + 2, y = \frac{-2}{x - 3} - 6.$$

Také zde koeficient k způsobuje natažení, smrštění nebo převrácení hyperboly. A čísla m a n opět znamenají posun počátku souřadnic z bodu $[0; 0]$ do bodu $[m, n]$. Je to analogická situace jako u paraboly. Na obrázku níže je $k = -1, -2, -4$ a $m = 3, n = 2$, tj. nový střed hyperboly je v bodě $S[3; 2]$.



Obr.: [VK]

20.3 Hyperbola jako lineární lomená funkce

Občas se v maturitních otázkách vyskytne hyperbola s obecným zápisem

$$f: y = \frac{ax + b}{cx + d},$$

například

$$y = \frac{2x - 2}{x - 3} - 6, \quad y = \frac{x + 5}{x + 3}.$$

Kupodivu je to hyperbola. Abychom to viděli, přepíšeme vzorec tak, aby $f: y = \frac{k}{x-m} + n$.

To uděláme tak, že se dělením zbavujeme proměnné x v čitateli:

$$y = \frac{x + 5}{x + 3} = \frac{(x + 3) + 2}{x + 3} = 1 + \frac{2}{x + 3} = \frac{2}{x + 3} + 1$$

a u druhého výrazu

$$y = \frac{2x - 2}{x - 3} - 6 = \frac{2(x - 3) + 4}{x - 3} - 6 = 2 + \frac{4}{x - 3} - 6 = \frac{4}{x - 3} - 4.$$

21 MOCNINA A EXPONENCIÁLA

Z tohoto tématu je 32 úloh z 822.

21.1 Nejčastější vzorec exponenciální funkce

Exponenciální funkce je definována předpisem

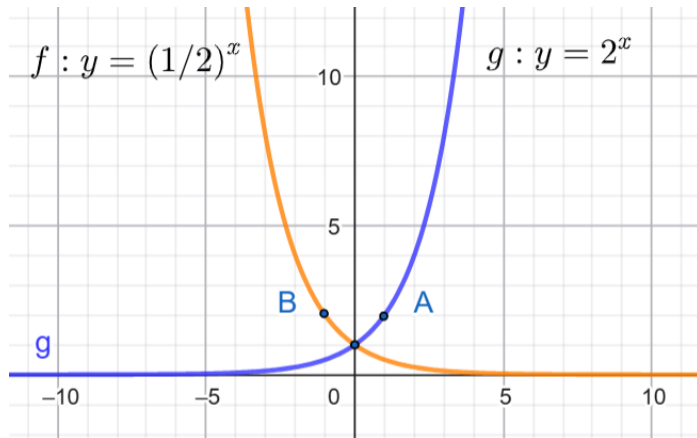
$$y = a^x,$$

kde $x \in \mathbf{R}$ a $a > 0$. Jinými slovy základ "a" musí být kladný, zatímco exponent x může být kladný i záporný. Snadno zjistíme, že je rozdíl mezi základem $a < 1$ a $a > 1$. Jsou to dvě

odlišné situace a dva odlišné grafy. Je to zřejmé, když mocníme malá čísla, dostáváme čísla ještě menší, zatímco když mocníme velká čísla, tak se zvětšují.

Graf $y = a^x$ pro $a < 1$ je na levé straně, graf $y = a^x$ pro $a > 1$ je na pravé straně.

Pro obrázek jsme zvolili konkrétně $a = \frac{1}{2}$ (nalevo) a $a = 2$ (napravo), ale tvar grafu je shodný i pro jiná $a < 1$ (nalevo) a pro $a > 1$ (napravo). Podstatné je, že když je základ mocniny větší než 1, tak postupně mocníme čísla větší, než jedna, čili se zvětšují, funkce $y = 2^x$ tedy roste (viz modrá). Když mocníme čísla menší, než jedna, třeba $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$, násobíme stále čísla menší než jedna, takže je zmenšujeme, funkce $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ klesá.



Obr.: Exponenciální funkce $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ nalevo a $y = 2^x$ (napravo), [VK]

Důležité je, že graf exponenciální funkce prochází vždy bodem $[0; 1]$, protože pro $x = 0$ je hodnota $y = a^0 = 1$ nezávisle na základu „ a “. Pro $x = 1$ zase máme $y = a^x = a$, čili na grafu takové funkce můžeme najít "neznámý" základ „ a “ přímo jako y -ovou souřadnici bodu grafu pro $x = 1$.

Občas se modrý nebo oranžový graf objeví jako možné řešení nějaké rovnice. Hlavní je, že a^x není nikdy ani nula, ani záporné číslo, je nad osou x . Tímto se často jednoduše rozliší od jiných funkcí v maturitních úlohách.

21.2 Tři pravidla, jak řešit úlohy s mocninami (exponenty)

Máme tři pravidla, která se mnohokrát použijí:

Druhá odmocnina se vyplatí vždy převést na mocninu:

$$\sqrt{X} = X^{\frac{1}{2}}$$

Záporná mocnina se někdy vyplatí převést na kladnou mocninu převráceného čísla a naopak:

$$X^{-1} = \frac{1}{X}, \quad \frac{1}{X} = X^{-1}$$

Také je dobré si zapamatovat a uvědomit, že X může být složitý výraz, třeba mocnina, odmocnina, cokoli, ale mínusové exponenty je obvykle výhodné převést na kladné, aby se nám lépe pracovalo. Analogicky pro obecnou n -tou mocninu a n -tou odmocninu:

$$\sqrt[n]{X} = X^{\frac{1}{n}} \quad X^{-n} = \frac{1}{X^n}$$

Příklad:

$$\sqrt[3]{a} = a^{\frac{1}{3}}, b^{-6} = \frac{1}{b^6}, \sqrt[5]{y^6} = y^{\frac{6}{5}}, b^{-6} = \frac{1}{b^6}, \sqrt[5]{y^6} = y^{\frac{6}{5}}, \frac{1}{\sqrt[5]{y^6}} = \frac{1}{y^{\frac{6}{5}}} = y^{-\frac{6}{5}}$$

Zlaté pravidlo: výrazy s mocninami se převádí na společný základ nebo na společnou mocninu.

Například, když někde máme

27^x a 3^5 nebo 2^{60} a 4^x , tak je převádíme na společný základ $3^{\text{něco}}$ nebo $2^{\text{něco}}$.

A dále předpokládáme znalost tří základních pravidel, bez kterých to nejde:

$$a^{x+y} = a^x \cdot a^y, (a^x)^y = a^{xy}, \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$$

22 LOGARITMY

Z tohoto tématu je 29 úloh z 822.

Dobrá rada: V řadě maturitních příkladů stačí přepsat $y = \log_a(x)$ na tvar $x = a^y$.

22.1 Úvod – tohle je nutné se naučit

Vše potřebné, zejména vzorečky k logaritům, jsou v Tabulkách. Možná někdy nebudeme zabíhat do podrobností, protože v maturitních úlohách se využívají jen podstatné vlastnosti. Následující je však naprosto nezbytné si zapamatovat:

Definice:

$$y = \log_a(x) \quad \text{znamená totéž, co} \quad x = a^y,$$

Podmínka:

Logaritmus $\log_a(x)$ se počítá jen pro kladná čísla x !!!

Pravidla:

$$\log_a(x \cdot y) = \log_a(x) + \log_a(y), \log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y), \log_a(x^n) = n \cdot \log_a(x)$$

Logaritmy dělají některým studentům potíže, proto tento text bude trochu delší, než je nutné.

22.2 Definice logaritmu

Definice logaritmu o základu 10

Logaritmus nějakého čísla x je jeho řád. $\log_{10}(x)$ zhruba říká, kolik má číslo x číslic když ho zapisujeme v dekadické soustavě. Třeba říkáme, že ta cena bude řádově v milionech. Tím říkáme, že ta cena bude mít určitě šest nul. Logaritmus té ceny bude proto minimálně 6, ale už ne 7, protože 7 by bylo sedm nul, což je 10 milionů a více. Pokud je cena přesně jeden milion, tak jeho logaritmus jednoho milionu je přesně $6 = \log_{10}(1.000.000)$. Pokud je cena deset milionů, tak jeho logaritmus je $7 = \log_{10}(10.000.000)$. Občas se říká, že „cena bude jednotky milionů“, takže někde mezi milionem a deseti miliony, třeba 3.650.441. Logaritmus té ceny bude také její řád, čili nějaké číslo mezi 6 a 7, protože je v rozmezí od jednoho do deseti milionů. Na kalkulačce dostaneme $\log_{10}(3650441) \doteq 6,56$. Jinými slovy $3.650.441 \doteq 10^{6,56}$, takže logaritmus nám říká přesný řád té ceny 6,56, nejen to, že je to něco mezi 6 a 7. Logaritmus definujeme přesně jako „mocninu“ nebo „řád“ čísla x :

$$y = \log_{10}(x) \quad \text{znamená totéž, co} \quad x = 10^y.$$

Definice logaritmu o obecném základu a

Logaritmus je zkrátka funkce inverzní k exponenciální funkci. Exponenciální funkce (o základu a) přiřazuje nějakému exponentu jeho mocninu $Exp: x \rightarrow y = a^x$, zatímco logaritmus nějaké hodnoty y vrací ten původní exponent x . Logaritmus proto můžeme definovat nejen v desítkové soustavě, ale i ve dvojkové soustavě nebo obecně v soustavě o jakémkoli základu a úplně stejně jako u $a = 10$:

$$y = \log_a(x) \quad \text{znamená totéž, co} \quad x = a^y,$$

$y = \log_a(x)$ je tedy stále řád čísla x , jen nyní v soustavě o základu „ a “, tj. v „ a -adické“ soustavě. Zápis čísla x se bude v desítkové soustavě lišit od jeho zápisu ve dvojkové soustavě, ale logaritmus bude stále říkat, jak je toto číslo velké, jaký má řád.

Podmínka: Logaritmus $\log_a(x)$ se počítá jen pro kladná čísla x !!! Tato podmínka je jednou ze tří klíčových podmínek v maturitních úlohách: nesmí se dělit nulou, logaritmus se počítá z kladného čísla a odmocnina z nezáporného čísla.

Pro úplnost musíme dodat, že také číslo a , základ logaritmu, musí být také kladné a nikoli jednička.

Podle pravidel (vzorečků) výše upravujeme například:

$$\log_a a = 1, \quad \log_a a^n = n, \quad \log_a \sqrt{a} = \log_a a^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}, \quad \log(800a) = \log 800 + \log a$$

22.3 Příklady $\log_{10}(x)$

Když zadáme do kalkulačky $\log_{10}(100)$, tak dostaneme 2, a další výpočty takto $\log_{10}(100) = 2, \log_{10}(1000) = 3, \log_{10}(500) \doteq 2,69, \log_{10}(10) = 1, \log_{10}(1) = 0$
Je to přesně podle definice, tj. podle vzorce

$$m = \log_{10}(10^m)$$

pro libovolnou mocninu m , neboli je to řád argumentu. Pro číslo 500, které není mocninou 10 vidíme, je jeho logaritmus cca 2,69, tj. něco mezi $2 = \log_{10}(100)$ a $3 = \log_{10}(1000)$, což odpovídá naší představě o řádu čísla. Hůře zapamatovatelné je, že $\log(10) = 1$, ale stále je to „číslo s jednou nulou“ a $10^1=10$, takže logaritmus deseti je jedna, Když počítáme logaritmus od čísla 1, tak to je číslo, které nemá žádné nuly, Ovšem jednička jako číslo nemá žádné nuly, ale platí $10^0=1$, proto $\log(1) = 0$. Čísla 2, 3, ..., 9 jsou mezi jedničkou a desítkou, takže mají řád někde mezi nulou a jedničkou.

$$\log_{10}(1) = 0, \log_{10}(2) \doteq 0,301, \log_{10}(3) \doteq 0,477, \log_{10}(9) \doteq 0,954, \log_{10}(10) = 1,$$

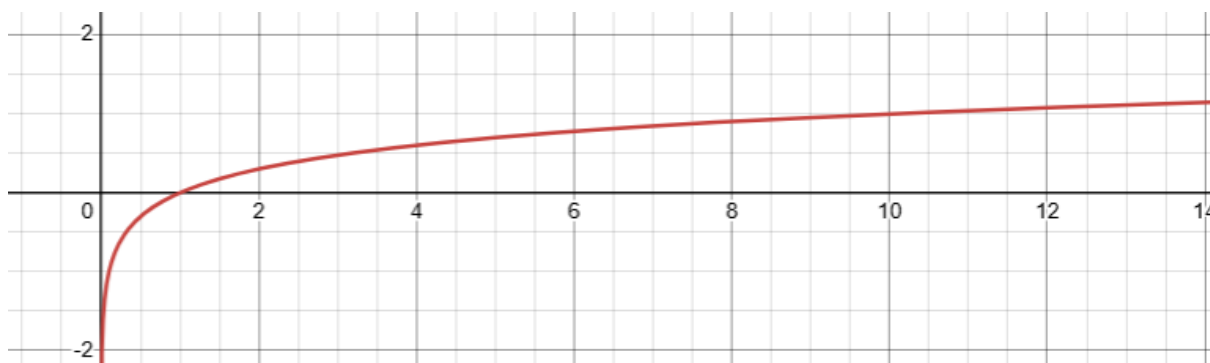
Nyní se ze světa velkých čísel posuneme do světa malých čísel, například do milimetrů, mikrometrů a nanometrů. Rozměry nábytku se udávají v centimetrech nebo milimetrech, tedy v setinách nebo tisícinách základní jednotky, kterou je metr. Jaký je řád milimetru? Je to tisícinu metru, tedy $\frac{1}{1000} = 10^{-3}$. Proto řád jedné tisícinu je mínus 3. Takže nás nepřekvapí, že mikrometry mají řád -6 , nanometry řád -9 , atd.

$$\log_{10}(0,01) = -2, \log_{10}(0,1) = -1, \log_{10}(0,5) \doteq -0,31, \log_{10}(0,9) \doteq -0,05, \log_{10}(1) = 0,$$

přesně podle vzorce

$$-m = \log_{10}(10^{-m})$$

pro libovolnou mocninu m . Pozor, mocnina je záporná, ale číslo 10^{-m} je kladné! **Logaritmus počítáme vždy z kladného čísla** (!), ale *hodnota logaritmu* může být záporná, nula nebo kladná! Na základě výše uvedeného nakreslíme graf:



Obr.: funkce $f: y = \log_{10}(x)$, [VK]

Na grafu lze dobře vidět, že je to funkce $f: y = \log_{10}(x)$, protože v bodě $x = 10$ máme hodnotu 1. V bodě $x = 1$ je jakýkoliv logaritmus (o jakémkoliv základu) povinně nula. Když jdeme s čísly x pod jedničku, tak velmi rychle se dostáváme k velkým záporným hodnotám. Na grafu ještě vidíme, že $\log_{10}\left(\frac{1}{10}\right) = -1$, ale už jen tušíme, že $\log_{10}\left(\frac{1}{100}\right) = -2$.

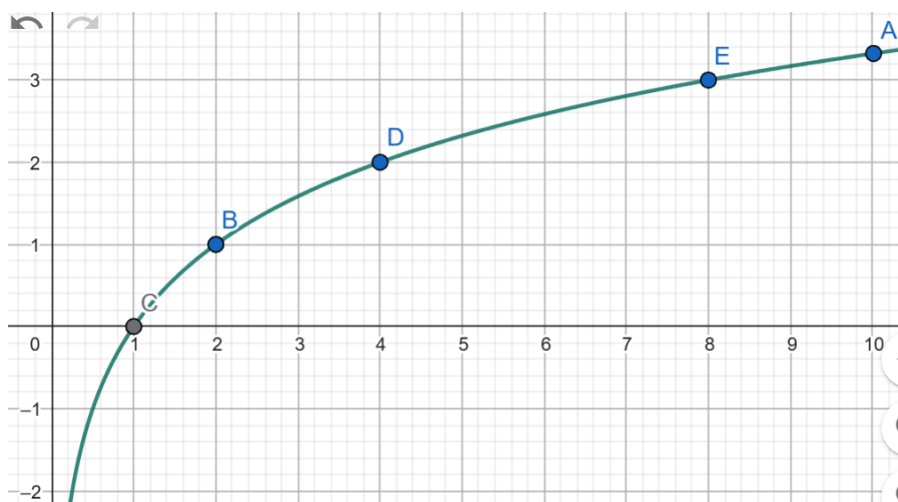
22.4 Příklady $\log_2(x)$

Jak bylo řečeno výše, definice logaritmu o základu a je analogická definici logaritmu o základu 10:

$$y = \log_a(x) \quad \text{znamená totéž, co} \quad x = a^y.$$

Podmínka: **Logaritmus $\log_a(x)$ se počítá jen pro kladná čísla x a kladné základy a !!!**

Logaritmus nějakého čísla x je jeho řád, ať je základ tohoto řádu jakýkoliv. $\log_{10}(x)$ zhruba říká, kolik číslic má x , když ho zapisujeme v dekadické soustavě. $\log_2(x)$ je počet číslic, když číslo x zapisujeme ve dvojkové soustavě. Na obrázku výše vidíme, že $\log_{10}(10) = 1$, zatímco na obrázku níže nebo na kalkulačce dostaneme, že $\log_2(10) \doteq 3,32$.



Obr.: funkce $f: y = \log_2(x)$, [VK]

Na grafu lze dobře vidět, že je to funkce $f: y = \log_2(x)$, protože v bodě $x = 2$ máme hodnotu 1 a ještě je vidět $\log_2(10) \doteq 3,32$.

Z grafu také vidíme, že
 logaritmus 1 je (povinně) 0, protože $2^0 = 1$,
 logaritmus 2 je 1, protože $2^1 = 2$,
 logaritmus 8 je 3, protože $2^3 = 8$,
 logaritmus 16 je 4, protože $2^4 = 16$ a
 logaritmus 10 je 3,32, což je něco mezi $3 = \log_2(8)$ a $4 = \log_2(16)$. To odpovídá naší představě o řádu čísla.

22.5 Definice logaritmu o základu e („přirozený logaritmus“)

Ještě poznamenejme, že logaritmus při základu 10 je tak běžný, že se základ 10 v zápisu logaritmu vynechává: $\log_{10}(x) = \log(x)$. Technici a vědci zase často používají jako základ logaritmu *Eulerovo číslo* $e = 2,71\dots$, takže místo $\log_e(x)$ píší $\ln(x)$.

22.6 Super rada

V řadě maturitních příkladů stačí přepsat $y = \log_a(x)$ na tvar $x = a^y$.

22.7 Příklady

Z maturitních úloh:

$$\log_4(x - 8) = 1$$

řešíme jako $4^1 = x - 8$

$$\log(2 - x) = -1$$

řešíme jako $10^{-1} = 2 - x$

$$\log_2 x^2 = 1$$

řešíme jako $2^1 = x^2$

$$\log_{10} 10^x + x \cdot \log_{10} 1 = \log_{10} 1000$$

řešíme jako $x + 0 = 3$

neboť $\log_{10} 1 = 0$, $\log_{10} 1000 = 3$

$$\log_a a^{25} = x$$

řešíme jako $a^x = a^{25}$, $x = 25$

$$2^{5x} - \log_5 \sqrt{5} = 0$$

řešíme jako $2^{5x} - \log_5 5^{\frac{1}{2}} = 0$,

tj. $2^{5x} - \frac{1}{2} = 0$, tj. $2^{5x} = 2^{-1}$, tj. $5x = -1$

$$\log_{10}(8 - 2x) - \log_{10}(2 - x) = 1$$

řešíme jako $\log_{10} \frac{8 - 2x}{2 - x} = 1$, tj. $\frac{8 - 2x}{2 - x} = 10^1$

$$\log_a \frac{8}{\sqrt{a}} - \log_a 8a =$$

$$= \log_a 8 - \log_a \sqrt{a} - (\log_a 8 + \log_a a) =$$

$$= \log_a 8 - \log_a a^{\frac{1}{2}} - \log_a 8 - 1 = -\frac{1}{2} - 1 = -\frac{3}{2}$$

Graf funkce $y = \log_a x$ prochází bodem $P\left[2; \frac{1}{2}\right]$, určete a .

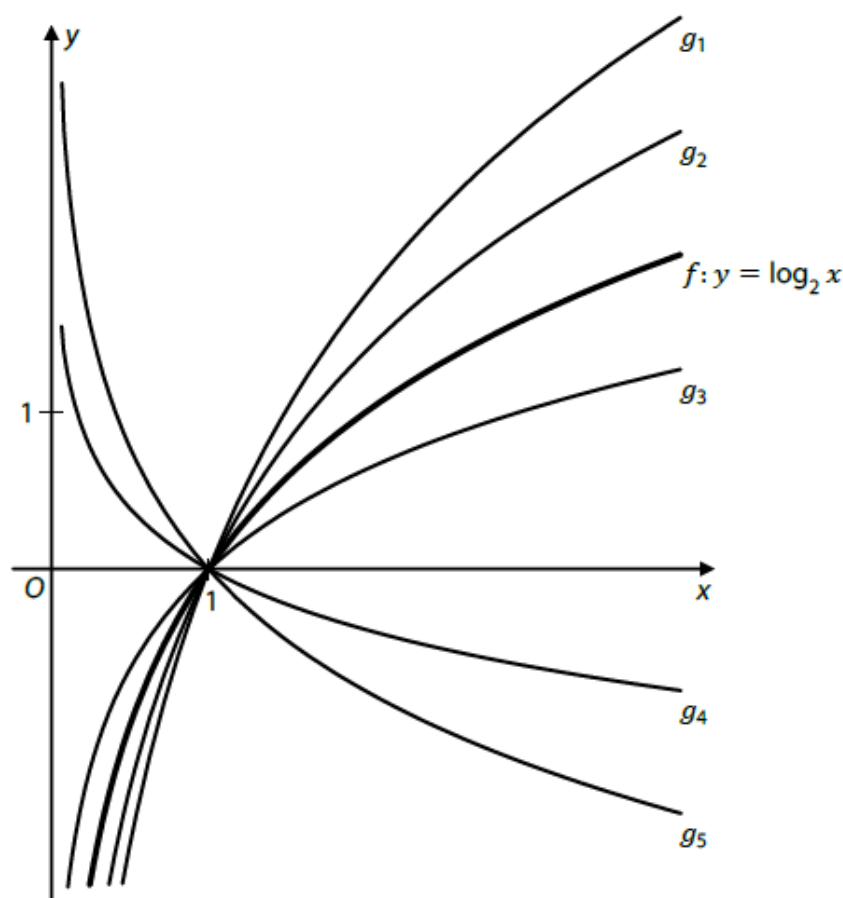
řešíme jako $\frac{1}{2} = \log_a 2$, tj. $a^{\frac{1}{2}} = 2$, $a = 4$

Vůbec nejtěžší příklad z logaritmů v maturitních úlohách (2021J_20,[CZVV]):

V kartézské soustavě souřadnic Oxy je sestaven graf funkce $f: y = \log_2 x$ a grafy pěti dalších logaritmických funkcí $g_1 - g_5$ s předpisy $y = \log_a x$, v nichž se základy a vzájemně liší. Všechny tyto funkce mají definiční obor $(0; +\infty)$.

Kolik z daných funkcí $g_1 - g_5$ má základ menší než 2 (tj. $a < 2$)?

Možnosti: (A) nelze určit, (B) jedna, (C) dvě, (D) tři, (E) čtyři



Řešení: základy logaritmických funkcí g_5, g_4, g_3 jsou menší než 2 (protože jsou pod funkcí f , která má základ 2), pak následuje $\log_2 x$ a potom g_2, g_1 se základy logaritmu většími než 2. Řešení je (D).

23 ANALYTICKÁ GEOMETRIE

Z 822 maturitních úloh bylo 79 úloh na toto téma, proto se vyplatí se pár věcí z tohoto textu naučit. Jsou to úlohy na vektory, přímky a vzdálenosti a asi 30 procent komplikovanější úlohy (lichoběžník, čtverec apod.), takže kupodivu není potřeba mnoho znalostí, ale je potřeba je umět použít při počítání příkladů. Na příkladech ukazujeme, jak se řeší (Příloha 1), tam se o minimalizaci vůbec nesnažíme. I tak většinu pojmů nebo jakýkoli kus následujícího textu můžete klidně přeskočit nebo jen přelétnout očima (to dokonce doporučuji). Všechny potřebné vzorce jsou totiž v Tabulkách!

23.1 Kartézská soustava souřadnic a body

Pojmy uvádíme ne teoreticky, ale z praktického hlediska!

Kartézská soustava souřadnic je tvořena osou x a osou y , které jsou na sebe *kolmé* a protínají se v počátku souřadnic O . Vytváří tak rovinu.

Bod $[x; y]$ je určen svými **souřadnicemi** na ose x a y , přičemž se setkáváme s mnoha způsoby zápisu bodu, například s čárkou nebo středníkem uprostřed $[2, -3]$, $[2; -3]$, nebo rovnou s označením bodu jako $A[x; y]$ nebo $A = [x, y]$ nebo $A[x_A; y_A]$, $B = [x_B; y_B]$, $[a_1; a_2]$,

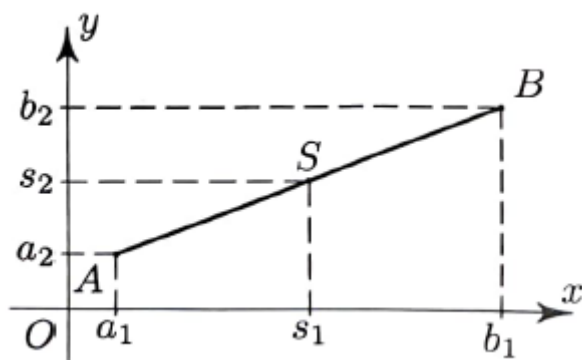
apod. Důležité jsou jen ty hranaté závorky a co je na prvním a druhém místě, nikoli jak je to označeno.

Střed úsečky AB

Když máme body $A[a_1; a_2]$, $B[b_1; b_2]$, můžeme i poslepu napsat souřadnice středu $S[s_1; s_2]$ úsečky AB:

$$S = [s_1; s_2] = \left[\frac{a_1 + b_1}{2}; \frac{a_2 + b_2}{2} \right].$$

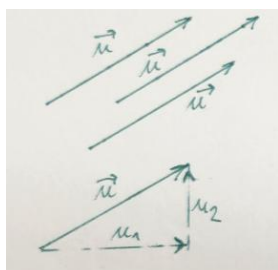
Prostě x-ová souřadnice S musí ležet uprostřed x-ových souřadnic bodů A a B, a podobně y-ová.



Obr.1: střed úsečky [Tabulky]

23.2 Vektory

Obecný vektor nebo prostě jen **vektor** udává **směr** a má **velikost**, ale v obecném pojetí může být **umístěn** do libovolného bodu v rovině. V úlohách se proto musí odlišit, jestli hovoříme o "obecném vektoru" jako o *směru* nebo už o vektoru, který je "umístěn" do konkrétního počátečního bodu.



Obr.2: obecný vektor, [VK]

Na obr. vidíme "obecný vektor", který jsme označili \vec{u} . Ještě není umístěn do konkrétního bodu, ale má směr a velikost. Je určený svými **souřadnicemi**

$$\vec{u} = (u_1, u_2),$$

kteří se tentokrát píší do kulatých závorek, aby se odlišily od souřadnic bodu. Souřadnice vektoru říkají, že když vyjdeme z nějakého bodu, tak máme jít ve směru osy x do vzdálenosti vzdálenost u_1 (je-li u_1 kladné, tak doprava, jinak doleva) a pak jít do vzdálenosti u_2 ve směru osy y (je-li u_2 kladné, tak nahoru, jinak dolů). Tím se z **počátečního bodu** dostaneme do **koncového bodu** vektoru a máme určený i **směr, i velikost**. Kdybychom vyšli z jiných počátečních bodů, dostali bychom spoustu těchto "šipek". Proto tento "obecný", "neumístěný" vektor $\vec{u} = (u_1, u_2)$. je celá množina šipek, které mají společný směr (jsou rovnoběžné) a stejnou **velikost** $|\vec{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}$.

Když si zvolíme konkrétní počáteční bod $A = [x_A, y_A]$ a umístíme do něj vektor $\vec{u} = (u_1, u_2)$, už máme **vektor \vec{u} umístěný do konkrétního bodu A**. Tím také máme definovaný "koncový" bod B, do kterého se dostaneme z bodu A pomocí vektoru $\vec{u} = (u_1, u_2)$, což zapisujeme jako $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ a souřadnice bodu B jsou tedy

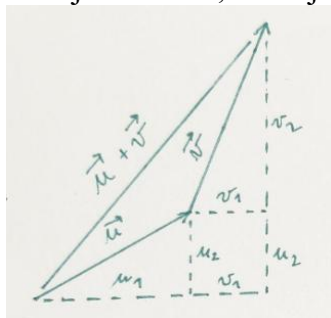
$$x_B = x_A + u_1, y_B = y_A + u_2$$

anebo obráceně $u_1 = x_B - x_A$ a $u_2 = y_B - y_A$, což je dobré si pamatovat:

X-ová souřadnice vektoru je rozdíl x-ových souřadnic koncového a počátečního bodu a y-ová souřadnice vektoru je rozdíl y-ových souřadnic koncového a počátečního bodu.

Součet vektorů $\vec{u} = (u_1, u_2)$ a $\vec{v} = (v_1, v_2)$ je definován jako nový vektor, který má souřadnice: $\vec{u} + \vec{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2)$.

Proč je tomu tak, ukazuje obrázek.



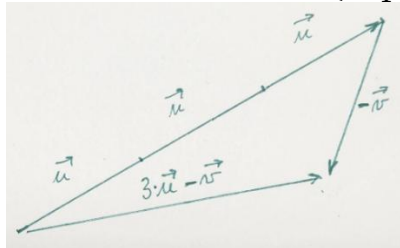
Obr.3: sčítání vektorů, [VK]

Násobení vektoru, lineární kombinace vektorů a opačný vektor

Násobení vektoru $\vec{u} = (u_1, u_2)$ reálným číslem k se projeví jako protažení nebo zkrácení původního vektoru nebo jako otočení vektoru do protisměru. Definujeme:

$$k\vec{u} = (ku_1, ku_2)$$

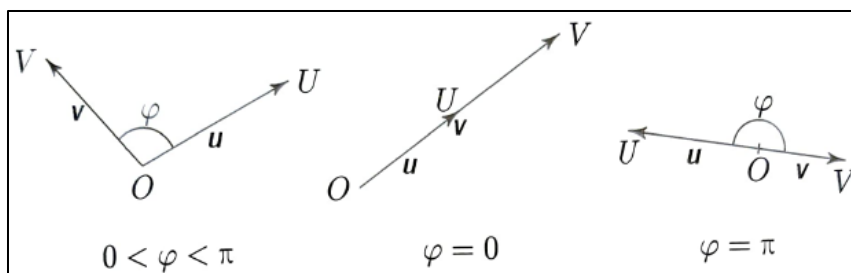
Je-li $k = -1$, pak výsledek nazýváme **opačný vektor** a značíme $-\vec{u} = (-u_1, -u_2)$. **Lineární kombinace vektorů** je součet dvou vektorů, které samy o sobě jsou násobky nějakých vektorů: $a \cdot \vec{u} + b \cdot \vec{v} = (au_1 + bv_1, au_2 + bv_2)$.



Obr.4: lineární kombinace vektorů, [VK]

23.3 Úhel mezi dvěma vektory

Mají-li dva vektory \vec{u} a \vec{v} společný počáteční bod, potom úhel mezi nimi se definuje jako (konvexní – není to tedy tupý) úhel mezi 0° a 180° , který spolu svírají.



Obr.5: úhel dvou vektorů [Tabulky]

Nulový úhel svírají vektory stejné nebo se stejným směrem (\vec{OU}, \vec{OV}), úhel 180° svírají opačné vektory a konvexní úhel φ mezi 0° a 180° svírají ostatní vektory. Velmi důležitá věta je, že úhel φ se dá vypočítat ze souřadnic vektorů podle vzorce

$$\cos(\varphi) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|},$$

kde

$\vec{u} \cdot \vec{v}$ je tzv. **skalární součin vektorů** $\vec{u} = (u_1, u_2)$ a $\vec{v} = (v_1, v_2)$, který je definovaný jako číslo

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2.$$

Kolmé vektory

Kolmé vektory \vec{u} a \vec{v} svírají úhel 90° , tj. $\cos(90^\circ) = 0$, neboli jejich souřadnice musí mít skalární součin nula: $u_1 v_1 + u_2 v_2 = 0$.

23.4 Přímky

23.4.1 Obecný tvar přímky, směrový a normálový vektor

Obecná rovnice přímky je zapsána rovnicí

$$ax + by + c = 0.$$

Směrový vektor přímky je jakýkoliv vektor, který udává směr přímky. Pokud zvolíme libovolné různé body A a B na přímce, je $\vec{u} = \vec{AB}$ směrový vektor přímky

$$\vec{u} = (u_1, u_2) = (b_1 - a_1, b_2 - a_2)$$

Normálový vektor přímky je zase jakýkoliv vektor \vec{n} , který je kolmý na směrový vektor \vec{u} (tj. na přímku samu).

Všechny potřebné znalosti k přímce pro potřeby maturitních příkladů z tématu analytické geometrie jsou v [Tabulky]:

body $A[a_1, a_2], B[b_1, b_2]$	$A \neq B$	
směrový vektor $\vec{u} = (u_1, u_2)$	nenulový vektor, který lze umístit na přímku p	
normálový vektor $\vec{n} = (n_1, n_2)$	$\vec{n} \perp \vec{u}$	
směrnice k	$k = \operatorname{tg} \varphi$; pouze když $\varphi \neq \frac{1}{2}\pi$	

Poznámka. Směrový a normálový vektor přímky nejsou určeny jednoznačně. Při vyjádření přímky za ně lze zvolit kterýkoliv z navzájem rovnoběžných vektorů.

23.4.2 Nejpoužívanější a nejdůležitější věta o přímce

Věta: Přímka s obecnou rovnicí $ax + by + c = 0$ má normálový vektor $\vec{n} = (a, b)$ a směrový vektor $\vec{u} = (b, -a)$.

Věta se často používá v maturitě. Třeba když máme dva body na přímce, můžeme vypočítat jejich rozdíl, a máme směrový vektor. Ze směrového vektoru (přehozením souřadnic a jednou otočíme znaménko) získáme normálový vektor, a tím i vektor kolmý na přímku.

Pokud známe třeba vektor $(4; 5)$, kolmý na přímku (tj. normálový vektor přímky), můžeme podle té věty výše rovnou psát rovnici přímky $4x + 5y + c = 0$. Zbyde nám už jen neznámý koeficient c , který určíme prostým dosazením souřadnic $[x; y]$ nějakého konkrétního bodu, kterým přímka prochází. Když prochází bodem $[1; 7]$, máme $4 \cdot 1 + 5 \cdot 7 + c = 0$, tj. $c = -40$ a máme kompletní rovnici $4x + 5y - 40 = 0$.

Když známe směrový vektor přímky, například $\vec{u} = (3; 2)$, pak normálový vektor je $\vec{n} = (2, -3)$ a rovnice přímky je $2x - 3y + c = 0$. A zbyde jen neznámý koeficient c , který určíme stejně jako výše z nějakého bodu na přímce.

Když známe rovnici přímky, třeba $2x - 8y + 3 = 0$, můžeme určit její normálový vektor $(2, -8)$ a směrový vektor $(8, 2)$.

23.4.3 Směrnice tvar přímky, tj. směrnice a posun

Ještě než se budeme věnovat tématu, tak si řekneme, že tento odstavec můžete přeskočit, protože vyloženě směrnici cituje jen jeden příklad ze 79, ale spoustu příkladů lze řešit jak normálovým a směrovým vektorem a nejpoužívanější větou o přímce, tak směrnice tvaru. Směrnice tvar je více názorný, normálový a směrový vektor se více hodí pro mechanické výpočty.

Výše jsme uvedli, že obecná rovnice přímky je zapsána rovnicí $ax + by + c = 0$. Protože tuto rovnici přímky můžeme libovolně násobit, třeba dvěma, $2ax + 2by + 2c = 0$, máme hned několik různých rovnic pro tutéž přímku. Tuhle nejednoznačnost pak odstraňuje tzv. směrnice tvar přímky, který bychom dostali vydělením takto: $y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$. Klasicky se **směrnice tvar přímky** zapisuje jako

$$y = kx + q$$

a k se nazývá **směrnice**, protože také udává směr přímky, a q se nazývá **posun**, protože názorně říká, že nejprve zkonstruuje přímku $y = kx$, která prochází počátkem $[0, 0]$, a tu svisle posuneme o konstantu q na ose y . Směrnice k i směrový vektor přímky $\vec{u} = (u_1, u_2)$ udávají směr přímky, a proto je mezi nimi jednoduchý vztah:

$$k = \frac{u_2}{u_1}$$

Navíc, když na přímce máme dva body A a B, pak můžeme spočítat směrový vektor jednoduše jako rozdíl jejich x-ových a y-ových souřadnic:

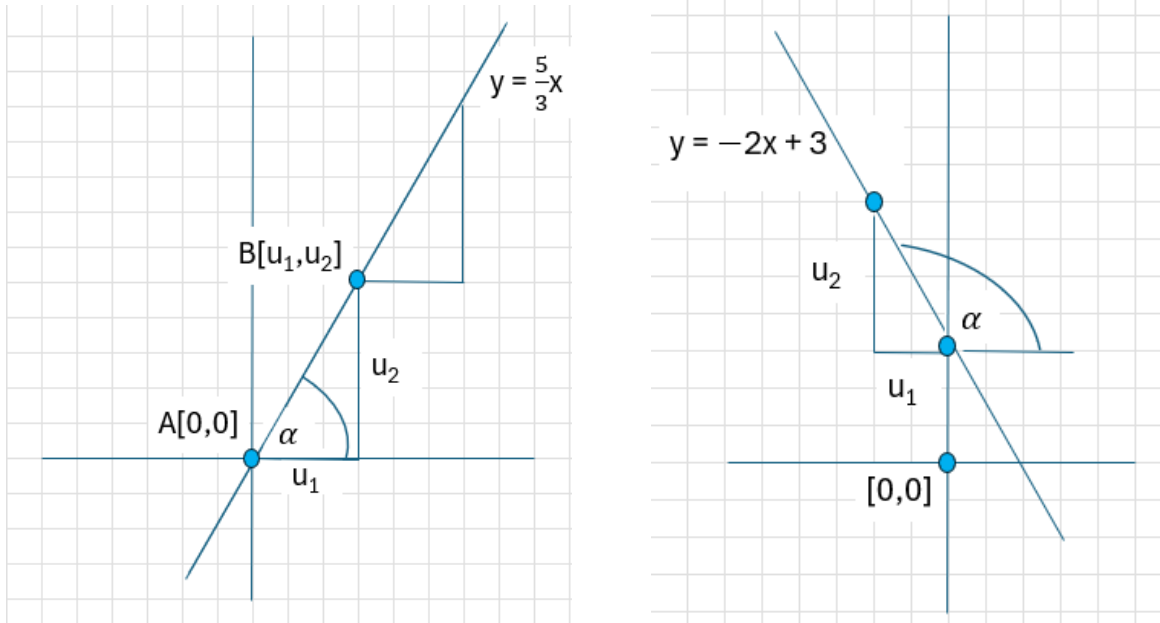
$$\vec{u} = (u_1, u_2) = (b_1 - a_1, b_2 - a_2)$$

a směrnici přímky:

$$k = \frac{u_2}{u_1} = \frac{b_2 - a_2}{b_1 - a_1}$$

Všimněte si, že směrnice je počítaná jako poměr u_2 ku u_1 , zatímco vektor \vec{u} má souřadnice u_1, u_2 , tedy „pořadí“ je obrácené.

Tento vztah jednoduše uvidíme z obrázku. U přímky nalevo vyjdeme z počátku $A = [0, 0]$, a pomocí směrového vektoru $\vec{u} = (u_1, u_2)$ se dostaneme do bodu B o souřadnicích $B[u_1, u_2]$.

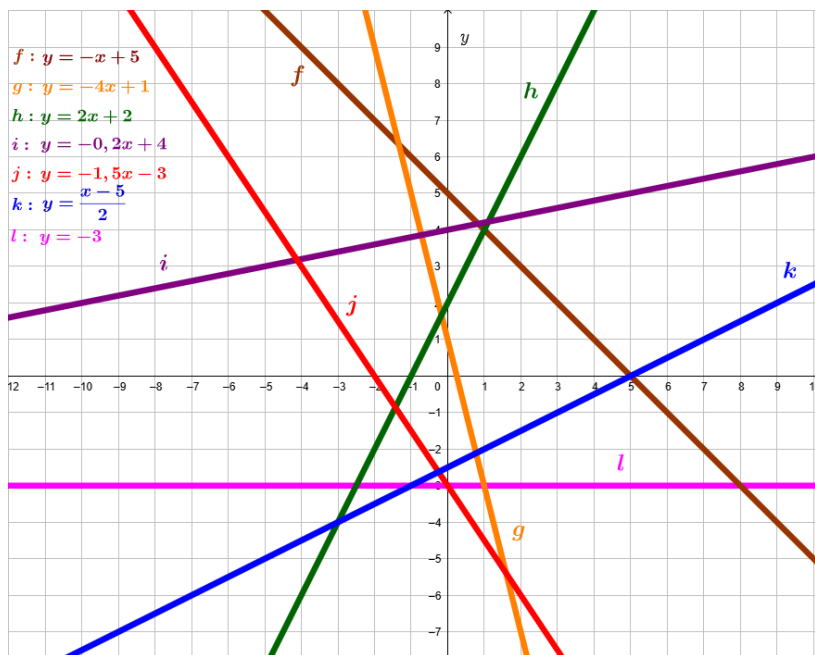


Obr. [VK]: Základní přímka $y = \frac{u_2}{u_1}x = \frac{5}{3}x$ nalevo má $tg(\alpha) = \frac{5}{3} = 1,67$, tj. $\alpha = \arctg(1,67) = 59^\circ$. Přímka $y = \frac{u_2}{u_1}x + q = \frac{4}{-2}x + q = -2x + 3$ napravo má $tg(\alpha) = -2$, tj. $\alpha = \arctg(-2) = 117^\circ$.

Vidíme, že směrnice je tangens úhlu, který svírá přímka s kladnou poloosou x , přičemž úhel se počítá proti směru hodinových ručiček. Je jasné, že tento úhel má u přímky smysl jen pro hodnoty $[0^\circ; 180^\circ)$, přičemž od 180° jsou to už tytéž přímky jako od 0° .

Pokud směr přímky je z druhého kvadrantu do čtvrtého, je hodnota směrnice (tangens úhlu α) záporná a úhel α je tupý. Na obrázku vpravo máme přímku $y = -2x$, navíc posunutou o $q = 3$ nahoru. Posun q nemá na směrnici ani směrový vektor přímky žádný vliv, protože směr zůstává zachován, tangens úhlu také, směrnice je stejná, ať je posun jaký chce.

Přímka $y = kx$ vždy prochází počátkem souřadnic a přímka $y = kx + q$ je jen tatáž přímka posunutá o hodnotu q nahoru (je-li q kladné) nebo dolů (je-li q záporné). Protože je to posun, zůstávají obě přímky rovnoběžné, přičemž první prochází počátkem $[0; 0]$ a druhá bodem $[0; q]$. Proto **posun q vidíme přímo na ose y** , a to v průsečíku přímky $y = kx + q$ s osou y . Pokud bychom obrázek neměli, je to přímo hodnota $y = kx + q$ v bodě $x = 0$.



Obr. [VK]: Přímky ve směrnicovém tvaru $y = kx + q$.

U přímek f, g, h, i, j, k, l mají posuny q hodnoty $q = 5, -1, 2, 4, -3, -\frac{5}{2}, -3$. Popisy přímek jsou v obrázku vlevo nahoře, kde také můžeme vidět jejich směrnice.

Jednoduché pravidlo pro zápornou a kladnou směrnici

Jednoduché pravidlo je, že směrnice je kladná, pokud přímka směřuje z kvadrantu III do kvadrantu I, a je záporná, pokud směřuje z kvadrantu IV do kvadrantu II.

23.4.4 Parametrický tvar přímky

V tabulkách je velmi názorný popis, jak z bodu $A[a_1, a_2]$ a směrového vektoru $\vec{u} = (u_1, u_2)$ konstruovat přímku v tzv. parametrickém tvaru. Je to tak, že z bodu A vyrazíme směrem jako je vektor \vec{u} a zastavíme ve vzdálenosti „ t “ vektorů \vec{u} . Tím dostaneme nějaký bod přímky $X = A + t\vec{u}$. Když takto použijeme všechna reálná čísla t , sestrojíme celou přímku. (Pro kladná t se vydáváme směrem \vec{u} , pro záporná opačným směrem), viz obr. z tabulek [Tabulky]:

Přímka daná bodem A a směrovým vektorem u	
$X = A + tu, \quad t \in \mathbb{R}$	
$x = a_1 + tu_1,$ $y = a_2 + tu_2, \quad t \in \mathbb{R}$ $X[x, y], \quad A[a_1, a_2],$ $u = (u_1, u_2)$	

Při tomto „cestování“ po přímce vytváříme bodům X souřadnice $[x; y]$, které jsou dány parametrickým vyjádřením pomocí proměnné $t \in \mathbb{R}$, jak je uvedeno v Tabulkách:

$$x = a_1 + t \cdot u_1,$$

$$y = a_2 + t \cdot u_2.$$

Když naopak někde vidíme parametrický tvar přímky, třeba

$$x = 6 + 3 \cdot t,$$

$$y = 5 + 7 \cdot t,$$

víme, že přímka prochází bodem [6; 5] a má směrový vektor $\vec{u} = (3; 7)$. Pokud si s parametrickým tvarem nevíme rady, parametr z rovnic vyloučíme a dostaneme klasicky jednu rovnici přímky. U posledního případu vyjádříme $t = (x - 6)/3$ z první rovnice a dosadíme do druhé: $y = 5 + 7 \cdot (x - 6)/3$. Po úpravě dostaneme je $3y - 7x + 27 = 0$.

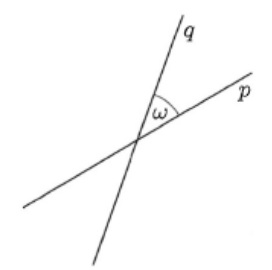
Vzdálenost bodu od přímky se vyplatí vypočítat podle vzorce, který je uveden v tabulkách.

23.4.5 Odchylka je ostrý úhel mezi dvěma přímkami

Důležité upozornění. Je rozdíl mezi úhlem, který svírají vektory a mezi úhlem, který svírají přímky!

Toto je určitá nepříjemnost proti intuici, ale on v tom rozdíl skutečně je. Vektory mají totiž jasný směr, zatímco přímky směřují dvěma směry. Vzniká pak otázka, mezi kterými úhly máme odchylku přímek měřit. Úhel mezi přímkami se proto definuje vždy jako ten menší (ostrý nebo pravý úhel nebo nulový úhel) ze dvou úhlů, který svírají, a nazývá se **odchylka dvou přímek**. Odchylku počítáme podle vzorce z tabulek buď ze směrových vektorů nebo ze směrnic.

Odchylka dvou přímek

$\cos \omega = \frac{ \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} }{ \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} } = \frac{ u_1 v_1 + u_2 v_2 }{\sqrt{u_1^2 + u_2^2} \cdot \sqrt{v_1^2 + v_2^2}}$	\mathbf{u} – směrový vektor přímky p \mathbf{v} – směrový vektor přímky q	 <p>$\omega \in \langle 0, \frac{1}{2}\pi \rangle$</p>	
$\operatorname{tg} \omega = \left \frac{k_1 - k_2}{1 + k_1 k_2} \right ,$ <p>jestliže $k_1 k_2 \neq -1$</p>	k_1 – směrnice přímky p k_2 – směrnice přímky q		
$\omega = \frac{1}{2}\pi,$ <p>jestliže $k_1 k_2 = -1$</p>			
Podmínky rovnoběžnosti		Podmínky kolmosti	
$\mathbf{u} = k\mathbf{v}, \quad k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$	$k_1 = k_2$	$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$	$k_1 k_2 = -1$

Obr.: Vzorce z [Tabulky]

Velmi užitečné pravidlo pro kolmost přímek je buď přes směrové vektory buď $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 = 0$ nebo přes směrnice: $k_1 \cdot k_2 = -1$.

Rovnoběžnost přímek nastane, když mají stejné směrnice $k_1 = k_2$. nebo „stejně“ směrové vektory (samozřejmě, až na nějaký násobek: $\mathbf{u} = k\mathbf{v}, k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.)

23.5 Jen tři rady na závěr

- Z obrázku nebo zadání využijte (dosad'te) všechny zakreslené body.
- Pro kolmici použijte vzorec pro normálový vektor.
- Kreslete.

24 GONIOMETRICKÉ FUNKCE

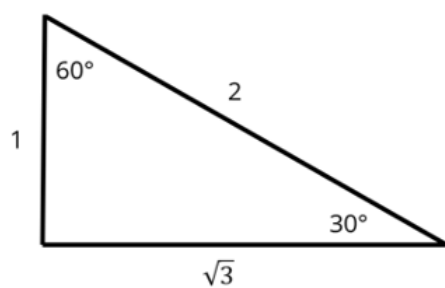
24.1 Úvod

Z tohoto tématu bylo 17 příkladů z 822. Většina úloh Cermatu používá v tomto tématu omezený okruh nutných vědomostí.

- pouze dva speciální pravoúhlé trojúhelníky, jeden $30^\circ + 60^\circ$, druhý $45^\circ + 45^\circ$, z nichž se odvodí hodnoty všech goniometrických funkcí pro 30° , 45° a 60° , což je 95% všech potřebných hodnot u maturity
- vědět, jaký je rozdíl mezi stupni a radiány, umět na kalkulačce zvolit obojí, umět na kalkulačce vypočítat hodnotu sinu pro 30° i pro $\pi/6$
- umět na kalkulačce vypočítat velikost úhlu z hodnoty jeho sinu, cosinu nebo tangens, čili použít funkci SHIFT SIN, ...
- umět nakreslit grafy sin, cos, tg a vědět jejich periody
- umět zapsat řešení v základním intervalu plus násobky periody
- další vzorce nejsou potřeba a všechno tohle je možné najít v tabulkách

24.2 Jak se definuje sin, cos a tg

Musíte si pamatovat, že (v pravoúhlém trojúhelníku!) je sinus protilehlá ku přeponě, kosinus přilehlá ku přeponě a tangens protilehlá ku přilehlé přeponě. Drtivá většina maturitních úloh používá hodnoty funkcí sin, cos a tg jen pro úhly 30° , 45° , 60° , 90° , které jsou vidět právě ze dvou základních trojúhelníků.



$$\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$$

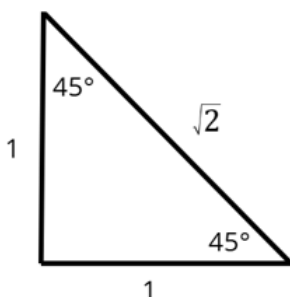
$$\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

sinus =
protilehlá ku přeponě

kosinus =
přilehlá ku přeponě



$$\sin 45^\circ = \cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

tangens =
protilehlá ku přilehlé

Obr.: [VK]

24.3 Dva základních trojúhelníky

Drtivá většina maturitních úloh používá hodnoty funkcí sin, cos a tg jen pro úhly 30° , 45° , 60° , 90° , které jsou vidět na dvou trojúhelnících výše. Tyto trojúhelníky se vyrábí na celém světě jako pomůcky pro studenty. Hodnoty funkcí sin, cos a tg třeba pro úhly 120° , 135° , 150° , 180° a další lze většinou odvodit z těch základních úhlů a z grafů sin, cos a tg (viz dále).

Stačí si dokonce pamatovat jen hodnoty pro sinus a kosinus, protože $tg(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$ a $cotg(x) = \frac{1}{tg(x)}$.

Potřebné hodnoty ukazuje tabulka:

	$0^\circ = 0$	$30^\circ = \pi/6$	$60^\circ = \pi/3$	$90^\circ = \pi/2$	$180^\circ = \pi$	$270^\circ = 3\pi/2$	$360^\circ = 2\pi$
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
tg	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{3}$	xxx	0	xxx	0
cotg	xxx	$\sqrt{3}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	xxx	0	xxx

Obr.: [VK]

Hodnoty z tabulky si rozhodně nemusíme pamatovat, pamatovat si musíte dva základní trojúhelníky výše a to, že sinus = protilehlá ku přeponě, kosinus = přilehlá ku přeponě, tangens = protilehlá ku přilehlé. Opakuji to už potřetí, protože tohle se MUSÍTE naučit. Jakmile uvidíte v maturitní otázce hodnoty:

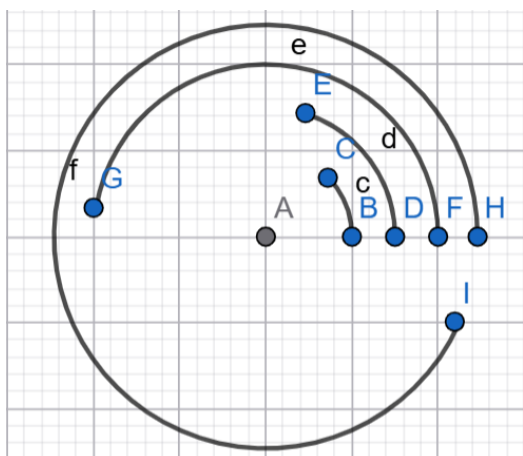
$$\frac{1}{2} \quad \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \quad 0 \quad 1 \quad -1 \quad \sqrt{3},$$

odpovídá to úhlům ze dvou základních trojúhelníků, takže můžete určit úhel bez kalkulačky. Nebo naopak pro úhly 30° , 45° , 60° , 90° můžete bez kalkulačky určit hodnotu sinu, kosinu a tg. V některých úlohách mohou být hodnoty funkcí zadány ekvivalentně takto (je to jen „rozšířený“ zlomek, se stejnou hodnotou):

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \quad \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{2\sqrt{3}}$$

24.4 Rozdíl mezi stupni a radiány

Rozdíl mezi stupni a radiány je v tom, jak se díváme na úhel. Buď klasicky přes stupně nebo přes kružnici – jakou část kružnice daný úhel „zabírá“. Ideálně si vezmete bod $\{1; 0\}$ a otáčejte ho kolem počátku o 360° proti směru hodinových ručiček. Po celé otočce se dostanete zpět do stejného bodu. Bod urazí po obvodu jednotkové kružnice vzdálenost $2\pi \approx 6,28$, ale pro nás to je zároveň 360° . Nemůžete ale mezi 6,28 a 360° napsat rovnítko. Proto říkáme, že úhel 360° je 2π "radiánů" a píšeme už korektně „ $360^\circ = 2\pi$ rad.“. Podobně $90^\circ = \pi/2$ rad. Jak poznáte, co je na kalkulačce nastaveno? Na kalkulačce jsou většinou nastaveny stupně! Stačí napsat $\sin(60)$ a dostanete $1/2$. Jestli ne, na kalkulačce jsou nastaveny radiány. Na kalkulačce je vždy v horní liště nebo v dolní liště nebo jinak (velmi malými písmeny) vyznačeno D nebo RAD podle toho, zda se úhel zadává ve stupních (Degree) nebo v radiánech (RAD). Pokud výpočty vychází divně, je zpravidla na vině přepnutí kalkulačky na D nebo RAD. Stačí si to vyzkoušet před maturitou.

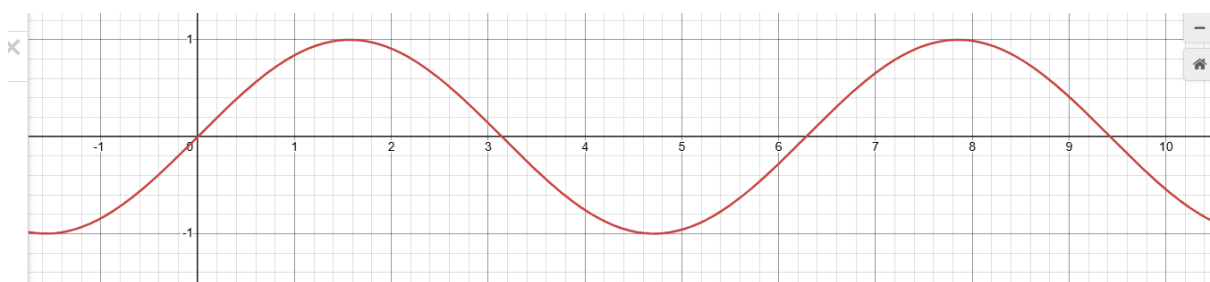


Obr. [VK]: Stupně a radiány, úhly ve $^\circ$ a v radiánech

24.5 Grafy sin, cos, tg a jejich periody

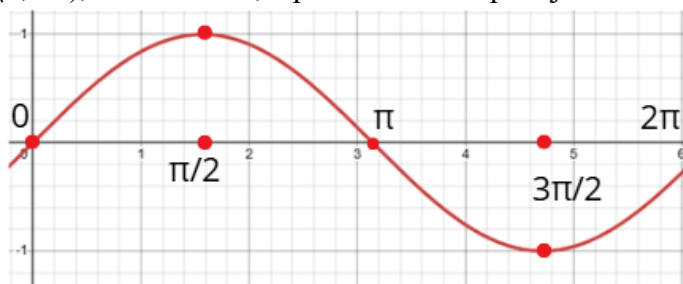
Budete muset umět nakreslit grafy sin, cos, tg a vědět, jak jsou periodické. V následujících obrázcích bude na reálné ose použito zobrazení v radiánech.

24.6 Funkce sinus



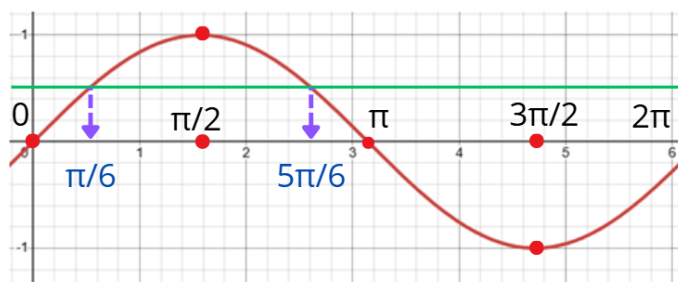
Obr. [VK]: Funkce $\sin(x)$

Na obrázku výše vidíme funkci sinus, resp. její část, protože je definovaná pro všechna reálná čísla. Nemusíme ji vykreslovat celou, protože má periodu 2π , takže se většinou vykresluje jen v intervalu $\langle 0, 2\pi \rangle$, viz obr. níže, a pak se to celé opakuje doleva i doprava.

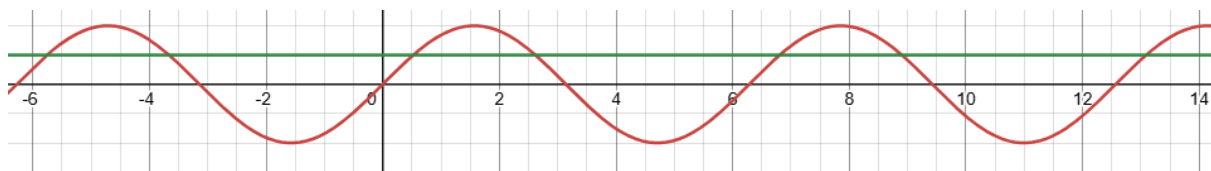


Obr. [VK]: Jedna perioda funkce $\sin(x)$, $x \in \langle 0; 2\pi \rangle$

Když máme vyřešit rovnici $\sin(x) = 1/2$, nakreslíme jak funkci $y = \sin(x)$, tak přímku $y = 1/2$ a díváme se, kde se protínají. Protínají se ve dvou bodech, přičemž podle tabulky hodnot snadno zjistíme ten první bod, který je $\pi/6$ neboli 30° . Ta druhá hodnota je díky symetrii funkce sinus odvoditelná tak, že je to nalevo od π ve vzdálenosti $\pi/6$, neboli $\pi - \pi/6 = 5\pi/6$ (neboli $150^\circ = 180^\circ - 30^\circ$)



Obr. [VK]: Funkce $y=\sin(x)$ a přímka $y=1/2$, v jedné periodě



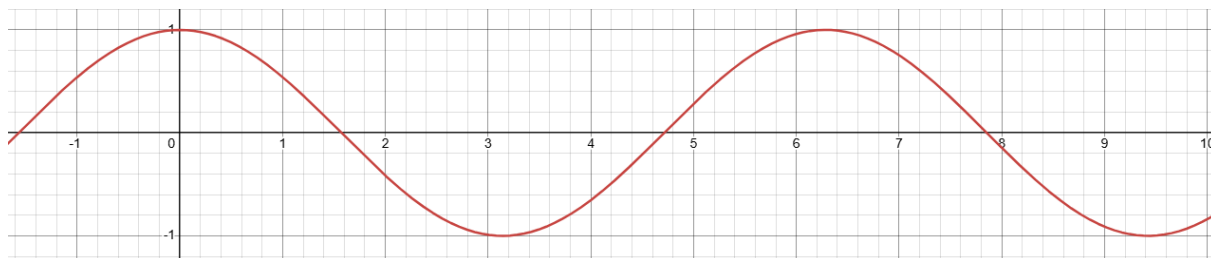
Obr. [VK]: Funkce $y=\sin(x)$ a přímka $y=1/2$

Měli jsme tedy dvě řešení $\pi/6$ a $5\pi/6$ v základní periodě, tj. v intervalu $(0, 2\pi)$. Pokud chceme všechna řešení na celé reálné ose, musíme k těm dvěma základním bodům přidat všechny možné násobky periody 2π . Řešením jsou $x = \pi/6 + 2k\pi$ pro všechna $k \in \mathbb{Z}$ (\mathbb{Z} je množina všech celých čísel) a $x = 5\pi/6 + 2k\pi$ pro všechna $k \in \mathbb{Z}$, **slovně "řešením jsou $x = \pi/6$ a $5\pi/6$ plus celočíselné násobky periody 2π ".** Nebo ve stupních: "řešením jsou $x = 30^\circ$ a 150° plus celočíselné násobky periody 360° ". Matematicky to je sjednocení:

$$K = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ \frac{\pi}{6} + 2k\pi; \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \right\} \text{ nebo } K = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \{30^\circ + k \cdot 360^\circ; 150^\circ + k \cdot 360^\circ\}.$$

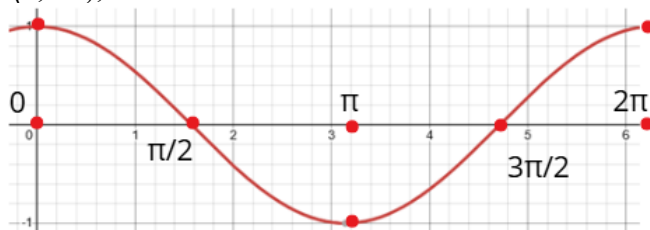
24.7 Funkce kosinus

Funkce kosinus je stejná jako funkce sinus, jen je posunutá o 90° neboli o $\pi/2$.



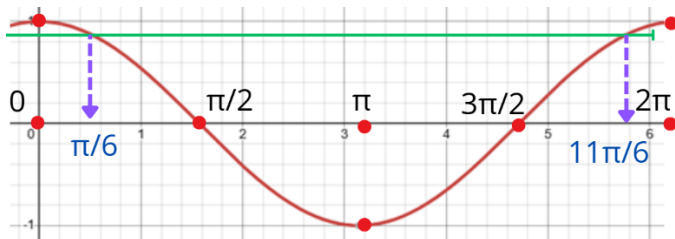
Obr. [VK]: Funkce $\cos(x)$

Nemusíme ji vykreslovat celou, protože má také periodu 2π , takže se většinou vykresluje jen v intervalu $(0, 2\pi)$, viz obr. níže.

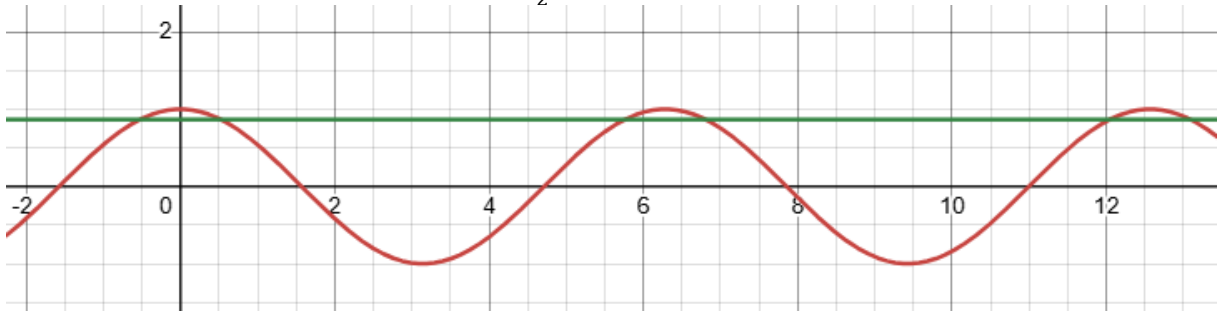


Obr. [VK]: Jedna perioda funkce $\cos(x)$, $x \in (0; 2\pi)$

Na obrázku níže bychom rádi vyřešili rovnici $\cos(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, proto jsme zde nakreslili obě funkce, tj. $y = \cos(x)$ a přímku $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$.



Obr. [VK]: Funkce $\cos(x)$ a přímka $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$ v jedné periodě



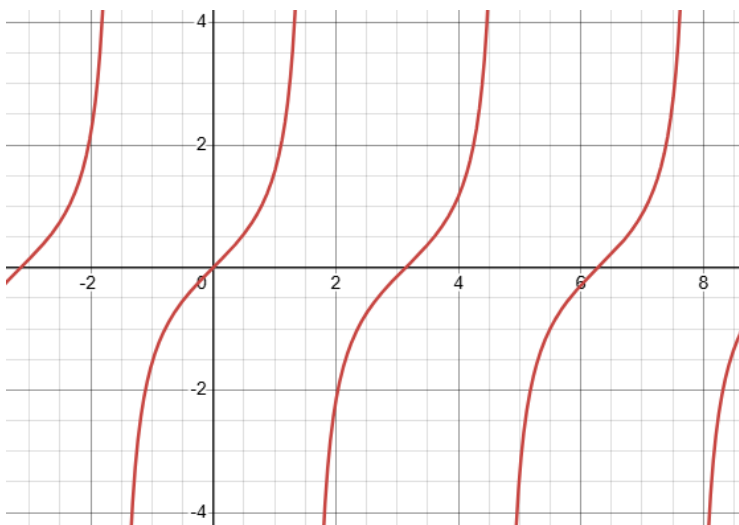
Obr. [VK]: Funkce $\cos(x)$ a přímka $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Grafy se protínají ve dvou bodech, přičemž podle tabulky hodnot snadno zjistíme ten první, což je $\pi/6$ neboli 30° . Ta druhá hodnota je díky symetrii funkce kosinus odvoditelná tak, že je to nalevo od 2π ve vzdálenosti $\pi/6$, neboli $2\pi - \pi/6 = 11\pi/6$ (tj. $330^\circ = 360^\circ - 30^\circ$). Přidáme k tomu celočíselné násobky periody 2π a máme "řešením jsou $x = \pi/6$ a $11\pi/6$ plus celočíselné násobky periody 2π ". Nebo ve stupních: "řešením jsou $x = 30^\circ$ a 330° plus celočíselné násobky periody 360° ". Matematicky zapsáno jako

$$K = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ \frac{\pi}{6} + 2k\pi; \frac{11\pi}{6} + 2k\pi \right\}.$$

24.8 Funkce tangens

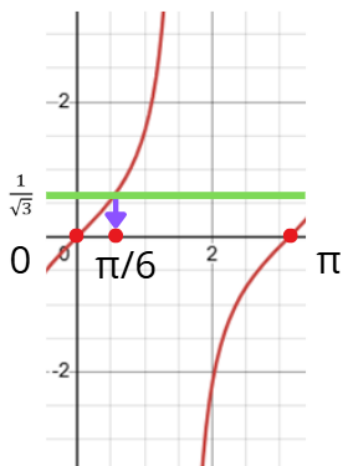
Funkce $\text{tg}(x)$ je definovaná jako $\text{tg}(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$. Je nepříjemná v tom, že není definovaná pro 90° , protože $\cos(90^\circ) = 0$, a tangens je sinus lomeno kosinus. Navíc je odlišná v tom, že má periodu nejen 2π , ale jen π , viz obr.



Obr. [VK]: Funkce $\text{tg}(x)$

I když je funkce tangens spojitá, jak je vidět na obrázku, když nakreslíme jednu její periodu, tj. funkci tg v intervalu $(0;\pi)$, vypadá nespojitě.

Na obrázku níže bychom rádi vyřešili rovnici $\text{tg}(x) = \frac{1}{\sqrt{3}}$, proto jsme zde nakreslili obě funkce, tj. $y = \text{tg}(x)$ a přímku $y = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Opět postačí najít řešení v základní periodě $(0;\pi)$, ostatní řešení vzniknou posunem o násobky π .



Obr. [VK]: Funkce $y = \text{tg}(x)$ a přímka $y = \frac{1}{\sqrt{3}}$, v intervalu $(0;\pi)$, [VK]

Ze základního trojúhelníku odvodíme úhel, pro něž je $\text{tg}(x) = \frac{1}{\sqrt{3}}$, což je $x = \frac{\pi}{6}$, a další řešení vzniknou posunem o jakýkoliv násobek periody π . Matematicky je řešení zapsáno jako

$$K = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ \frac{\pi}{6} + k\pi \right\}.$$

24.9 Příklady.

Drtivá většina příkladů je stejná (jen různě formulovaná), a to určit úhel (nebo úhly) ze základního intervalu $x \in (0; 2\pi)$, pro které platí

$$\begin{aligned} \sin(x) &= \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 1, 0, -1, \dots \\ \cos(x) &= \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 1, 0, -1, \dots \\ \text{tg}(x) &= \sqrt{3}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\sqrt{3}, \frac{-\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, 1, 0, -1, \dots \end{aligned}$$

čili stačí znát dva základní trojúhelníky a z nich odvodit základní úhel, pro něž platí rovnice a pak ještě druhý úhel z grafu funkce. Většinou jsou řešením dva úhly v základní periodě $(0; 2\pi)$ nebo jeden úhel v periodě $(0; \pi)$ u tangens (a podobně kotangens), viz příklady výše.

25 Literatura

[CZVV] Centrum pro zjišťování výsledků vzdělávání – Cermat, maturitní úlohy z matematiky z let 2014–jaro 2026, ilustrační testy Cermatu, katalogy požadavků k maturitě z matematiky, souborů a katalogů vzorových úloh, ilustračních testů, mimořádných testů, řešení příkladů a další materiály Cermatu

[Tabulky] Mikulčák J., Charvát J., Macháček M., Zemánek F.: Matematické, fyzikální a chemické tabulky a vzorce pro střední školy, Prometheus, 2025

[VK] Ke kreslení obrázků byly použity kreslicí programy <https://www.geogebra.org/> a <https://www.desmos.com/calculator>